

بررسی دقیق رفتار مدل‌های آشوبی با استفاده از روش نمودار دوشاخگی کیفی

قاسم صادقی بجستانی^{۱*}، عباس منزوی^۲ و سید محمدرضا هاشمی گلپایگانی^۳

^۱ گروه مهندسی پزشکی، مرکز تحقیقات علوم اعصاب محاسباتی، دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع)، مشهد، ایران

^۲ گروه مهندسی پزشکی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

^۳ دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران



چکیده

روش اساسی برای شناسایی رفتار نگاشت‌های بازگشتی، ترسیم نمودار بایفورکیشن (دوشاخگی) است. در روش مرسوم با تغییر مقدار پارامتر نگاشت، سری‌های زمانی متعددی ایجاد می‌شود و آن‌گاه با ترسیم مقادیر این سری‌ها در دوره ماندگار - بر حسب مقادیر پارامتر - نمودار دوشاخگی به دست می‌آید. این نمودارها، در تعیین دوره تناوب و همچنین جداسازی رفتارهای با دوره تناوب طولانی، از رفتارهای آشوب‌گونه، دقت کافی ندارند؛ و از طرف دیگر به دلیل دویعدی بودن نمودارها، امکان بررسی اثر شرط نخستین در شکل‌گیری بستر جذب وجود ندارد. نمودار ارائه‌شده در این پژوهش که آن را نمودار دوشاخگی کیفی (QBD) می‌نامیم، امکان تعیین دقیق دوره تناوب را فراهم می‌کند. با استفاده از QBD شناسایی مقادیری از شرط نخستین و پارامتر که به‌ازای آنها رفتار نگاشت، متناوب، شبه‌متناوب و یا آشوب‌گونه است، ممکن خواهد بود. نتایج به دست آمده از پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی بر روی نگاشت لاجستیک، بیان‌گر توانایی آن در تشخیص تناوب‌های بالا و پنجره‌های متناوب است. همچنین مشاهده شد، نمودار دوشاخگی لاجستیک از یک نظم موزاییکی (نظمی که از چینش اجزا در کنار هم و نه براساس تعامل شکل بگیرد) بهره‌مند نیست و نظمی پویا دارد. مزیت‌های QBD بر روش معمول ترسیم نمودار دوشاخگی عبارتند از: تشخیص تناوب‌های بالا، تشخیص پنجره‌های متناوب، کاهش زمان محاسبات و نمایش دوره تناوب به جای مقادیر کمی دامنه. در ادامه این پژوهش به صورت تحلیلی نمای لیاپانوف - به عنوان یکی از ابزارهای متداول در شناسایی آشوب - مورد بررسی قرار گرفته و درباره صحت آن نکات قابل تأملی بیان شده است. در پایان به منظور ارزیابی روش پیشنهادی، تحلیل کمی سازی بازگشت و QBD مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

واژگان کلیدی: نمودار دوشاخگی، آشوب، نگاشت لاجستیک، نمای لیاپانوف، نمایش بازخداد.

Accurate Survey of Chaotic Modeling with Qualitative Bifurcation Diagram

Ghasem Sadeghi Bajestani^{1*}, Abbas Monzavi² & Seyyed Mohammad Reza Hashemi Golpayegani³

¹ Computational Neuroscience Research Center, Imam Reza International University, Mashhad, Iran

² Biomedical Engineering Department, Shahed University, Tehran, Iran

³ Biomedical Engineering Department, AmirKabir University of Technology, Tehran, Iran

¹ Qualitative Bifurcation Diagram

سال ۱۳۹۵ شماره ۳ پیاپی ۲۹

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات

Abstract

The most important method for behavior recognition of recurrent maps is to plot bifurcation diagram. In conventional method used for plotting bifurcation diagram, a couple of time series for different values of model parameter have been generated and these points have been plotted with due respect to it after transient state. It does not have enough accuracy necessary for period detection and essential for discrimination between long periodic behaviors from chaotic behaviors; on the other hand because of being 2-dimensinal, it will not be possible to investigate the effect if the initial condition is in the basin of attraction.

In this research, a new bifurcation diagram is presented which is called: Qualitative Bifurcation Diagram (QBD). QBD provides accurate determination of periodicity. Results of our algorithm implementation on logistic map, represents its ability on determining long periods and period windows. Bifurcation diagram of logistic map does not obey mosaic tiling patterns (patterns that are created by arrangement not interaction) as a discipline in addition to having the dynamic order. Some benefits of QBD are: long period discrimination, period window detection, computation time reduction, period presentation instead of amplitude show. In the following we have an analytical survey to Lyapunov exponent – as a usual measurement tool for chaotic behavior – and important notes are expressed. Finally, Recurrent Quantification Analysis (RQA) and QBD are compared.

Keywords: Bifurcation diagram, Chaos, Logistic Map, Lyapunov Exponent, Recurrent Quantification Analysis

استفاده می‌شود. بدین منظور ابتدا با مساوی قرار دادن مقدار X_k با X_{k+1} نقاط ثابت نگاشت، محاسبه می‌شود. (معادله ۲) که این عمل به معنای صفرشدن تغییرات در حالت ماندگار است.

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k^* \rightarrow X_k^* = A X_k^* (1 - X_k^*) \\ \rightarrow X_1^* &= 0, X_2^* = 1 - \frac{1}{A} \end{aligned} \quad (2)$$

در ادامه جهت انجام تحلیل پایداری نقاط ثابت، از معادله نگاشت، مشتق گرفته و بر اساس قدر مطلق شیب در نقاط ثابت، پایداری نقاط تعیین می‌شود. چنانچه قدر مطلق شیب برای نقطه‌ای در نزدیکی نقطه ثابت، بیشتر از یک باشد، نقطه مورد نظر از نقطه ثابت دور می‌شود؛ بنابراین نقطه ثابت را ناپایدار^۲ یا نقطه ثابت دافع^۳ می‌نامند. در مقابل، اگر قدر مطلق شیب کمتر از یک باشد، نقطه ثابت را پایدار^۴ یا نقطه ثابت جاذب^۵ می‌نامند.

با این تحلیل وقتی مقدار A از یک کوچکتر است ($A \leq 1$) نقطه صفر، نقطه‌ای جاذب است. در این وضعیت با شروع از هر شرط نخستینی، سرانجام مقدار $X = 0$

۱- مقدمه

با توجه به تنوع رفتار نگاشت‌های بازگشتی استفاده از آنها به منظور مدل‌سازی سامانه‌های زیستی، رو به گسترش است. [8]-[1] یکی از شاخص‌های مهم در انتخاب مدل مناسب برای سامانه، پایداری است. علاوه بر این اطمینان درباره کیفیت رفتار مدل در محدوده معینی از مقدار پارامترها اهمیت ویژه‌ای دارد.

در مراجع متعدد به منظور مطالعه تحلیلی رفتار نگاشت، ابتدا نقاط ثابت^۱ معادله آن را محاسبه و سپس با بررسی رفتار نگاشت در اطراف این نقاط، وضعیت نگاشت را در حالت ماندگار تعیین می‌کنند [9].

نگاشت لاجستیک، نخستین بار در سال ۱۹۷۶ معرفی شد. نگاشت لاجستیک به دلیل تنوع رفتار، یکی از نگاشت‌های پرکاربرد در مدل‌سازی رفتار سامانه‌ها زیستی است. [10]، [11] این نگاشت که با معادله (۱) توصیف می‌شود، یک معادله تک‌متغیره از مرتبه نخست است و تنها یک پارامتر کنترل دارد (A). برای پایداری نگاشت لاجستیک، باید مقدار پارامتر کنترل، بین صفر تا چهار باشد. مقادیر سری زمانی تولیدشده (X) بین صفر و یک هستند [12].

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f(X_k) = A X_k (1 - X_k) \\ A &\in [0, 4], X \in [0, 1] \end{aligned} \quad (1)$$

برای شناخت کیفیت رفتار این نگاشت، به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر، به‌طور معمول از شیوه بررسی نقاط ثابت

¹ Fixed Points

² Unstable Fixed Point

³ Repelling Fixed Point

⁴ Stable Fixed Point

⁵ Attracting Fixed Point

$$X_1^* = f(X_2^*), X_2^* = f(X_1^*) \rightarrow X_1^* = f \circ f(X_1^*) \quad (3)$$

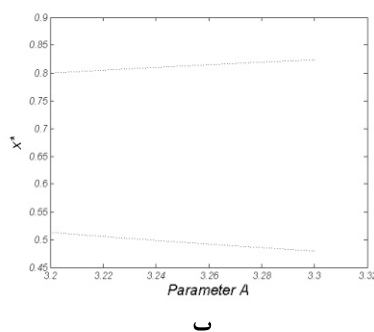
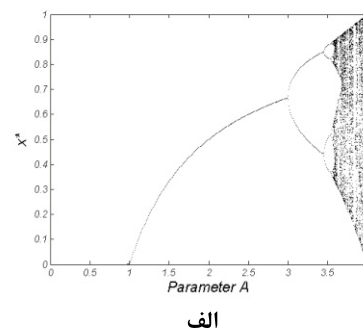
با افزایش پارامتر A نقاط ثابت جدید نیز ناپایدار می‌شوند. در این شرایط باید به سراغ نگاشت‌های مرتبه بالاتر رفت؛ لذا منطقی است که نگاشت مرتبه سوم امتحان شود؛ اما به این دلیل که نمودار دوشاخگی وجود چهار نقطه پایدار را الزامی می‌داند، به جای مطالعه نگاشت سوم در این مرحله، نقاط ثابت نگاشت چهارم و در مراحل بعدی نگاشت هشتم و... بررسی می‌شوند. بنابراین مسیر بررسی تحلیلی بر اساس نمودار دوشاخگی تعیین می‌شود. لذا تحلیل ریاضی ابزار برای فهم نمودار دو شاخگی (حل عددی) است. از این رو می‌توان ادعا کرد درک ما از رفتار نگاشت‌ها بر اساس حل عددی و نمودار دوشاخگی شکل می‌گیرد.

نمودارهای دوشاخگی مرسوم تنها مقادیر عددی بستر جذب را نمایش می‌دهد؛ لذا فهم دقیق رفتار این نگاشت و تشخیص رفتار متناوب از آشوب‌گونه در دوره‌های تناوب بالا از روی این نمودار ممکن نیست و ممکن است به اشتباه، آشوب شناسایی شود. به عنوان مثال تشخیص دوره تناوب 176 (در مقدار پارامتر کنترل $A = 3.602$) از آشوب با استفاده از نمودار دوشاخگی مرسوم به سختی ممکن خواهد بود.

در این پژوهش برای نخستین بار به جای نمایش مقادیر بستر جذب، مقادیر دوره تناوب به ازای مقادیر مختلف پارامتر A محاسبه و به عنوان نمودار دوشاخگی کیفی³ (QBD) ارائه شده است. با استفاده از این نوع نمودار، دوشاخگی زوایای جدیدی از رفتار نگاشت لاجستیک قابل کنکاش است، به عنوان مثال می‌توان به وابستگی بعضی از رفتارهای متناوب آن به شرایط اولیه، اشاره کرد. همچنین به این روش، امکان بحث در خصوص علت بروز آشوب در دینامیک این سامانه فراهم شده است.

حساسیت به شرط نخستین یکی از معیارهای شناسایی رفتار آشوب‌گونه است. کمی‌سازی این معیار با استفاده از نمای لیاپانوف انجام می‌شود. با فرض نمایی بودن، نمای لیاپانوف مثبت، بیان گر واگرایی دو تراکتوری متمایز با شرایط نخستین نزدیک به هم است. نمای لیاپانوف برای نگاشت لاجستیک، به ازای مقادیر مختلف پارامتر A با استفاده از فرمول (۴) محاسبه می‌شود [13]، [15].

خواهد شد. وقتی A بین یک و سه است ($1 < A < 3$) نقطه صفر، نقطه‌ای دافع و نقطه $1-1/A$ نقطه‌ای جاذب است. بنابراین با انتخاب هر مقدار نخستینی برای X ، مقدار نهایی متغیر، برابر $1-1/A$ خواهد شد. در ادامه وقتی A بیشتر از سه می‌شود ($A > 3$) هر دو نقطه ثابت، ناپایدار می‌شوند، اما نگاشت پایدار می‌ماند. برای تحلیل این پایداری، از حل عددی نگاشت لاجستیک (معادله ۱) استفاده می‌شود. بدین منظور نمودار دوشاخگی^۱ (نمودار دوشاخه‌شدگی) ترسیم می‌شود. [13] در این نمودار مقادیر سری زمانی در حالت ماندگار، به ازای مقادیر مختلف پارامتر ترسیم می‌شود. (شکل ۱-الف). [2]، [14] با مراجعه به نمودار دوشاخگی، وقتی پارامتر $A > 3$ است، سری زمانی در حالت ماندگار دارای دو مقدار خواهد بود (دوره تناوب^۲ دو)؛



(شکل- ۱): نمودار دوشاخگی لاجستیک (با

الگوریتم‌های معمول) با مقدار اولیه ۰/۴۲

الف. $0 < A < 4$ ب. $3.2 < A < 3.3$

(Figure- 1): Bifurcation Diagram of Logistic Map (with General algorithm) initial condition which is 0.42 a. $0 < A < 4$ b. $3.2 < A < 3.3$

لذا در حالت ماندگار، دو نقطه پایدار جدید خواهیم داشت که به صورت متوالی اتفاق می‌افتند، در این صورت برای تکرار هر کدام، باید یک بار از نقطه دیگر عبور کرد. بنابراین نقاط پایدار جدید از نگاشت دوم قابل محاسبه هستند (معادله ۳).

¹ Bifurcation Diagram

² period

³ Qualitative Bifurcation Diagram (QBD)

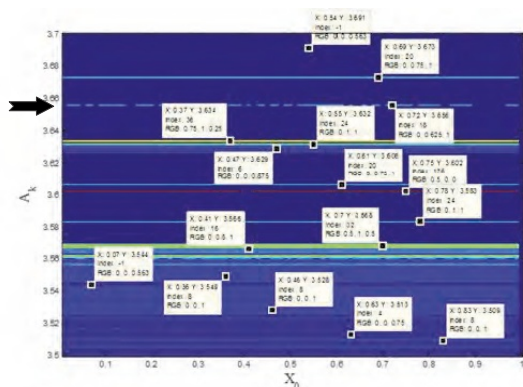
بررسی اثر شرط نخستین بر دینامیک سامانه در ابعاد بالاتر وجود دارد. شکل (۲) در این شکل می‌توان به سادگی اثر شرط اولیه بر پویایی سامانه در شرایط آشوبناک را مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال نگاشت لاجستیک در نواحی اطراف $A=3.658$ رفتار آشوب گونه دارد؛ اما در این مقدار شاهد یک رفتار تناوبی با دوره تناوب 18، هستیم که با تغییر در شرط اولیه (محور افقی) دچار گسستگی‌های متعددی شده است. این اتفاق بیانگر اثر شرط اولیه بر پویایی سامانه در پارامتر $A=3.656$ است. (شکل ۲ - پیکان زرد رنگ)

Qualitative Bifurcation Diagram

```

Define Vector  $X_1$  and  $A$  ( $L = \text{Length}(A)$ ,  $LL = \text{Length}(X_1)$ )
Define Flage,  $a_{ij} = -1$  for all  $i$  and  $j$  (Flag  $L \times LL$ )
Define Iteration Number (iter)
Define Maximum period (Maxperiod)
For  $i \leftarrow 1$  to  $L$  do
  For  $ii \leftarrow 1$  to  $LL$  do
     $X(1) \leftarrow X_1(ii)$ 
    For  $k \leftarrow 1$  to iter do
       $X_{k+1} \leftarrow A_i * X_k * (1 - X_k)$ 
    Endfor
    If  $X_{k+1}$  is infinit
      Flage( $i, ii$ )  $\leftarrow -1$ 
      Break For $k$ 
    Endif
    If Flage( $i, ii$ ) is -1
      For  $m \leftarrow 1$  to Maxperiod
        If  $X_{\text{end}-m}$  Precisely is  $X_{\text{end}}$ 
          Flage( $i, ii$ )  $\leftarrow m$ 
          Break For $m$ 
        Endif
      Endfor
    Endif
  Endfor
Endfor
Endfor
Endfor

```



(شکل-۲): نمایش QBD لاجستیک در دو بعد. محور افقی مربوط به تغییرات شرط اولیه و محور عمودی مربوط به تغییرات پارامتر A است.

(Figure-2): QBD representation of Logistic Map in 2-dimension. Horizontal axis represents the initial condition (X_0) and vertical axis represents the control parameter (A)

$$\lambda = \frac{1}{n} (\ln |f'(x_0)| + \dots + \ln |f'(x_{n-1})|) \quad (۴)$$

که در آن $f'(x)$ مشتق معادله نگاشت لاجستیک و $\ln$ لگاریتم طبیعی است [15]. در این فرمول با فرض اینکه دو تراژکتوری از نقاط نخستین نزدیک به هم شروع شده‌اند، نسبت افزایش فاصله در تکرارهای بعدی با مشتق جایگزین شده است، بنابراین $f'(x_{n-1})$ به معنای قرارداد x_{n-1} در فرمول مشتق است، وقتی که شرط نخستین x_0 باشد. در منابع مختلف با ترسیم هم‌زمان نمودار دوشاخگی و نمای لیپانوف به مطالعه رفتار نگاشت می‌پردازند [16] و نمای لیپانوف مثبت را معرف رفتار آشوب گونه و نمای لیپانوف منفی را توصیف‌گر رفتارمتناوب می‌دانند [17]، [18].

در ادامه در بخش دوم روش کار و شبهه‌کد الگوریتم QBD معرفی شده است؛ در بخش سوم الگوریتم QBD به منظور ترسیم نمودار دوشاخگی کیفی به کار گرفته شده و مزایای آن بررسی شده است. در بخش سوم نیز نمای لیپانوف و ابزار نمایش باز رخداد^۱ به عنوان ابزارهای تحلیل سیگنال‌های آشوب گونه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲- روش کار

روش QBD مبتنی بر کیفیت دادگان - نه فقط کمیت- است، در این روش دوره تکرار به‌ازای مقادیر مختلف محاسبه و ترسیم می‌شود. برای ترسیم QBD از شبه کد^۲ زیر استفاده می‌کنیم.

ایده اصلی در محاسبه دوره تناوب این است که، در یک نگاشت بازگشتی وقتی به نخستین تکرار برخوردیم بقیه مقادیر نیز به صورت تکراری تولید شده و تشکیل یک رفتار متناوب می‌دهد. پس دوره تناوب نزدیک‌ترین فاصله تکرار یک مقدار در سری زمانی نگاشت بازگشتی است. در این روش پس از تولید سری زمانی و قرار گرفتن در بستر جذب (عبور از دوره گذرا)، آخرین نمونه تولیدشده را با نمونه‌های قبلی مقایسه کرده و در صورت تساوی، اختلاف شماره تکرار^۳ به عنوان دوره تناوب در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که رفتارهای تکراری در دوره گذرا پدیدار نمی‌شوند، با بروز رفتارهای تکراری می‌توان از رسیدن به بستر جذب اطمینان داشت. چنانچه پس از تعداد محدودی تکرار، مقادیر یکسانی مشاهده نشود، آشوب تشخیص داده و به جای دوره تناوب مقدار 1- را به آن اختصاص می‌دهیم. در این روش امکان

¹ Recurrent Quantification Analysis

² Pseudo code

³ Iteration

۳- پیاده‌سازی الگوریتم

نمودار دوشاخگی کیفی، ویژگی‌های خاصی دارد که برخی از آنها عبارتند از: ۱- شناسایی مقادیری از شرط اولیه و پارامتر که نگاشت به‌ازای آن مقادیر پایدار است. ۲- تشخیص صحیح دوره‌های تناوب. ۳- شناسایی دوره‌های تناوب طولانی، شبه‌متناوب، آشوب و ... ۴- مشاهده پنجره‌های متناوب جدید. ۵- امکان بررسی دقیق نمای لیاپانوف ۶- هزینه محاسباتی بسیار پایین‌تر از روش‌های مرسوم. ۷- امکان نمایش نمودار دوشاخگی در دو و یا سه بعد که در ادامه به بررسی تفصیلی پنج ویژگی نخست خواهیم پرداخت. لازم به ذکر است، در ترسیم شکل‌ها و محاسبات، دو ویژگی دیگر نیز مورد توجه قرار گرفته است.

۳-۱- مقادیری از شرط اولیه و پارامتر که

نگاشت به‌ازای آن مقادیر پایدار است

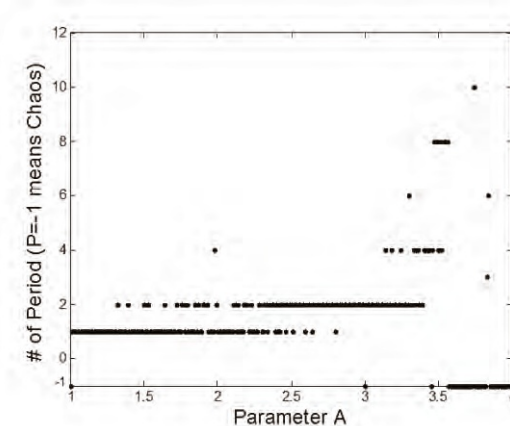
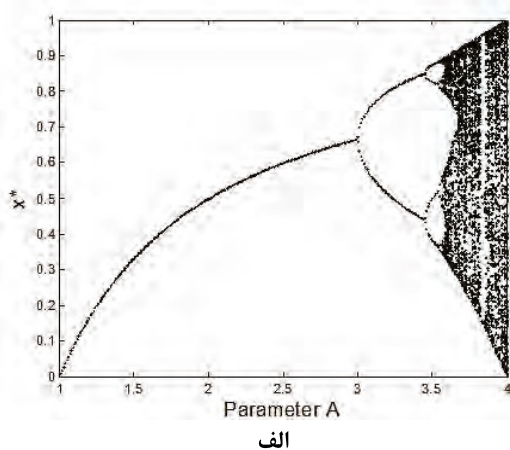
نخستین ویژگی روش QBD آن است که مقادیری را از شرط اولیه و پارامتر که به‌ازای آن مقادیر پایدار هستند می‌توان بدست آورد. به‌عنوان مثال یکی از نگاشت‌های شبه‌لاجستیک به‌صورت معادله (۵) است را در نظر می‌گیریم. این نگاشت دارای نقطه پایدار حقیقی نیست اما با استفاده از QBD به‌سادگی آن را می‌توان تحلیل نموده و رفتارهای مختلف آن را دنبال کرد.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k^2 + Ax_k - 1 \\ x_{k+1} &= f(x_k) \rightarrow f(x_k) = 2x_k + A \\ x_k^* &= \frac{-(A-1) \pm \sqrt{(A-1)^2 + 4}}{2} \rightarrow \\ f(x_k^*) &= 1 \pm \sqrt{(A-1)^2 + 4} \rightarrow |f(x_k^*)| > 1 \end{aligned} \quad (5)$$

شکل (۴) نشان می‌دهد رفتار این نگاشت بیشتر اوقات متناوب با دوره تناوب دو، و آشوب است. رفتار این نگاشت دارای نکات قابل تأملی است، نخستین نکته تغییر رفتار این نگاشت از آشوب به متناوب و برعکس به‌ازای تغییر در شرط اولیه است. (اثر شرط اولیه بر رفتار پویا) دومین نکته مهم همان‌طور که در شکل (۴) نمایش داده شده است- وجود سه نقطه بحرانی^۱ در بستر جذب^۲ است. در نقاط بحران با تغییر بسیار ناچیز شرط نخستین رفتار نگاشت از آشوب به متناوب با دوره تناوب دو، تغییر می‌کند.

۳-۲- تشخیص صحیح دوره‌های تناوب

دومین ویژگی روش QBD تشخیص صحیح دوره‌های تناوب است. در شکل (۳) نمودار دوشاخگی مرسوم برای نگاشت لاجستیک، در کنار نمودار دوشاخگی کیفی (نمایش دوره تناوب بر اساس مقادیر پارامتر) رسم شده است. نخستین نکته عجیب این است که به‌ازای مقادیر مشخصی از پارامتر کنترل، نمودار دوشاخگی کیفی کاهش و افزایش‌های متوالی دوره تناوب را نشان می‌دهد درحالی‌که در نمودار دوشاخگی کمی (مرسوم)، دوره تناوب ثابت است. به‌عنوان مثال در محدوده $A < 3$ ، انتظار می‌رود به‌ازای تمامی مقادیر A شاهد رفتار متناوب با دوره تناوب برابر یک باشیم؛ درحالی‌که در نمودار کیفی تناوب‌های ۴، ۲، ۱ دیده می‌شود. علت نیز آن است که چون مقادیر سری زمانی بسیار نزدیک به هم هستند این تغییر در دوره تناوب با استفاده از نمودار دوشاخگی کمی قابل تشخیص نیست.



(شکل-۳): نمایش نمودار دوشاخگی

الف. مرسوم ب. QBD

(Figure-3): Bifurcation Diagram
a. Conventional b. QBD

² Basin Of Attraction

¹ Crisis

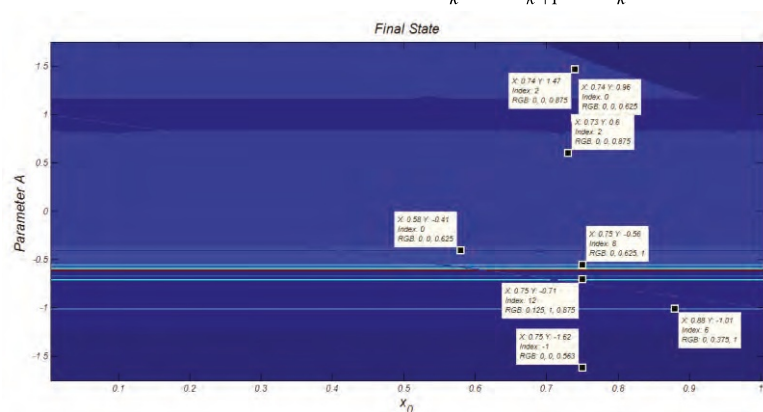
$$W_k = X_{k+1} - X_{k-1} \quad (7)$$

$$Z_k = X_{k+1} - X_{k-2} \quad (8)$$

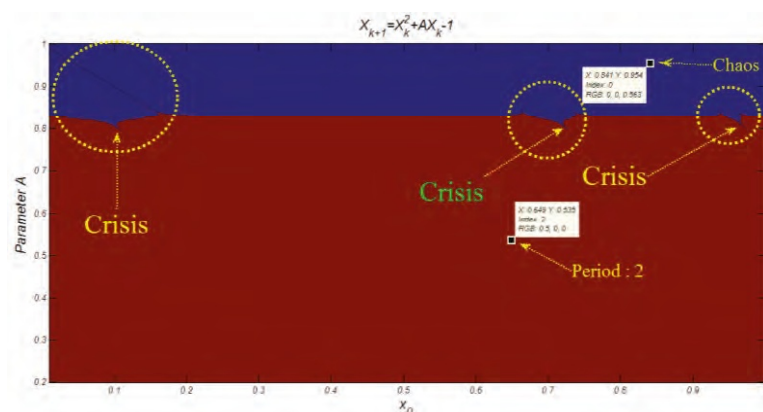
$$V_k = X_{k+1} - X_{k-3} \quad (9)$$

به عنوان مثالی دیگر به ازای مقدار $A=3.252$ دوره تناوب سری زمانی ۴ برابر است اگرچه در نمودار کمی این دوره تناوب دو، می باشد (شکل ۱-ب). برای بررسی بیشتر موضوع چهار بردار تعریف می کنیم:

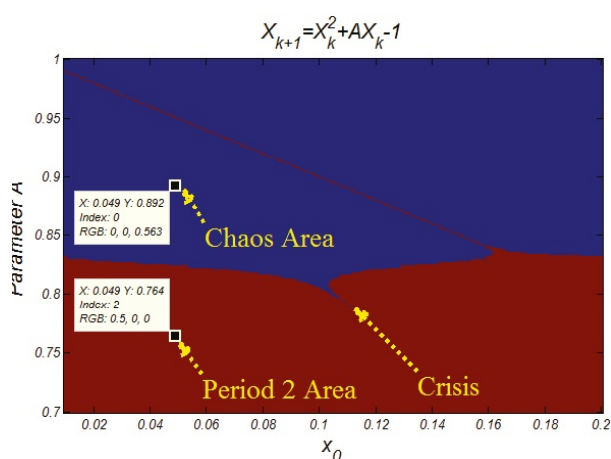
$$Y_k = X_{k+1} - X_k \quad (6)$$



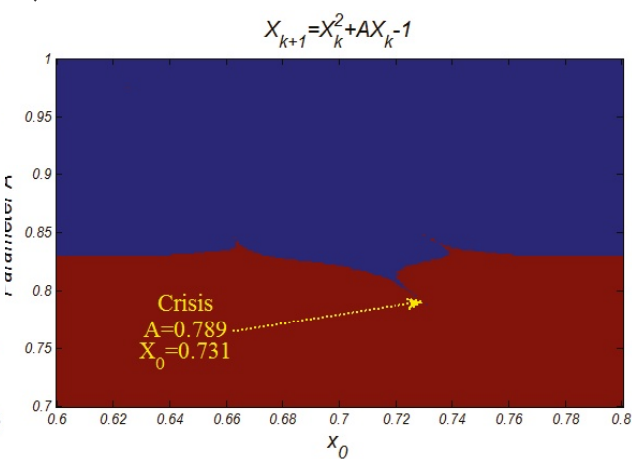
الف



ب



ت

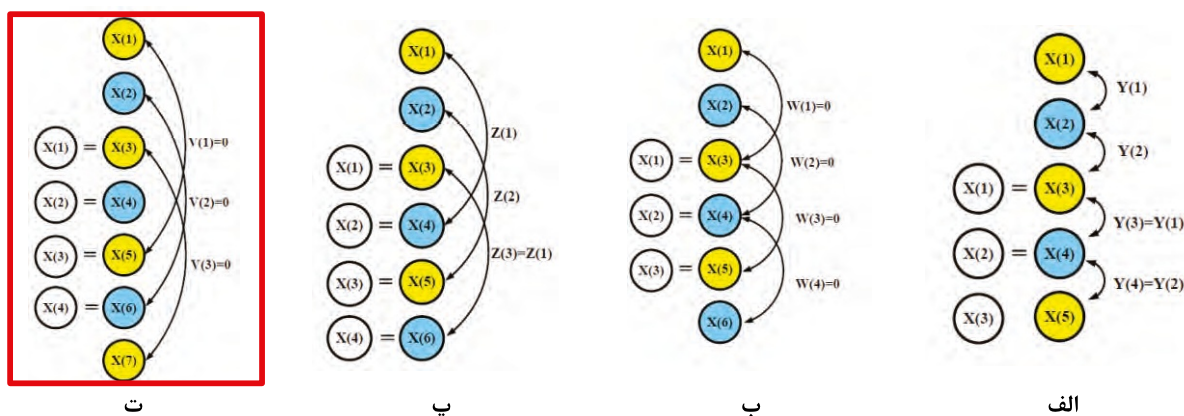


پ

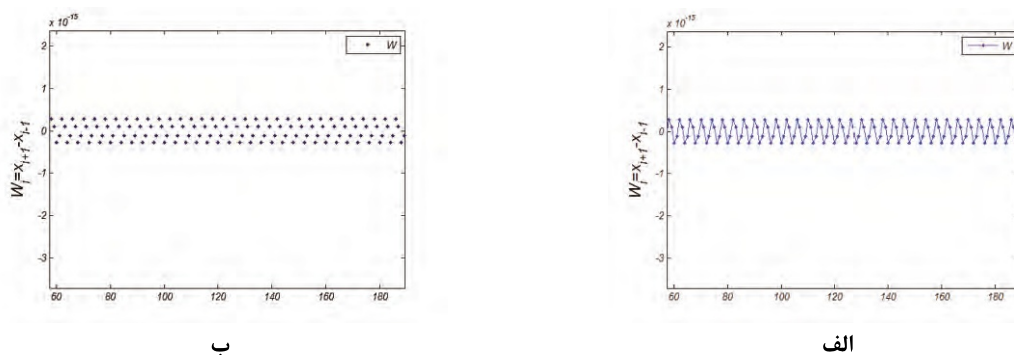
(شکل ۴-): ویژگی QBD در نمایش مقادیری از پارامتر و شرط اولیه که به ازای آنها نداشت پایدار است. بررسی رفتار نگاشت شبه لاجستیک (معادله ۵) الف. نمایش تغییرات رفتار نگاشت با تغییر پارامتر کنترل و شرط اولیه. ب. نمایش وجود سه نقطه بحران در نگاشت شبه لاجستیک. پ. نمایش نقطه بحران ت. نواحی پرید دو و آشوب و پنجره پریدیک وسط آشوب

(Figure-4): QBD property in representation of stable values of parameter and initial condition. Logistic-like behavior survey (Equation 5) a. variation of map behavior for control parameter and initial condition changes. b. three critical points in Logistic-like c. critical point representation d. period-2, chaos and periodic window

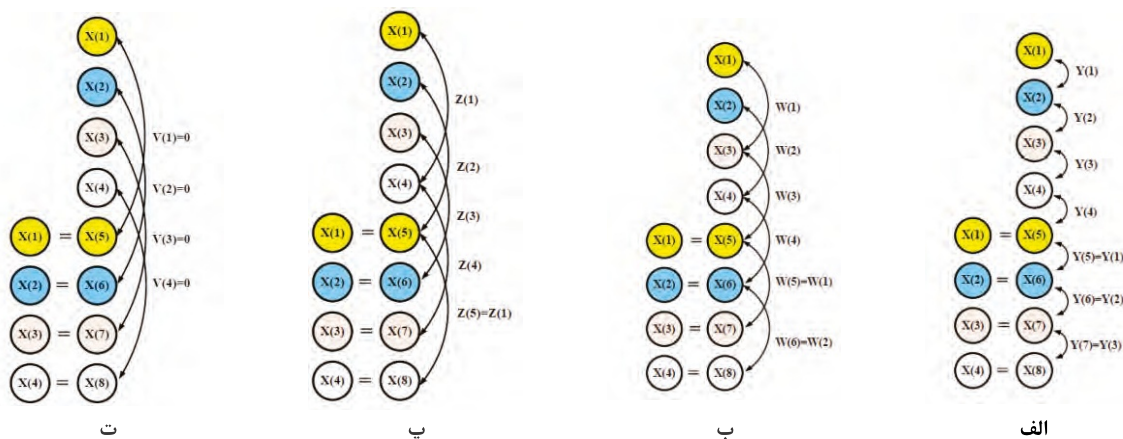
صفر مطلق نیست و دوره تناوب چهار در بردار W وجود دارد (شکل ۶). در صورتی که سری عددی دارای دوره تناوب چهار باشد، باید دنباله‌های حاصل از اختلاف هر نمونه با نمونه بعدی، دو نمونه بعدتر، سه نمونه و چهار نمونه پس از آن، همگی متناوب با دوره تناوب چهار باشند. این موضوع در (شکل ۷-الف) تا (شکل ۷-ت) نمایش داده شده است. در شکل (۸) نتایج حاصل از اجرای الگوریتم برای بردار V را نشان می‌دهد.



(شکل - ۵): روابط حاکم بر دوره تناوب "دو" و اینکه در این تناوب بایستی نتایج معادله ۷ و ۹ صفر باشند. الف. نمایش معادله ۶. ب. نمایش معادله ۷. پ. نمایش معادله ۸. ت. نمایش معادله ۹
(Figure-5): Period-2 relations and zero values of W_k and V_k . a. Equation 6 representation. b. Equation 7 representation. c. Equation 8 representation. d. Equation 9 representation



(شکل - ۶): نتایج حاصل از شبیه سازی معادله ۷ (W) برای لاجستیک با $A=3.252$ که حاکی از آن است به ازای این پارامتر نگاشت لاجستیک پریود ۲ نمی‌دهد در حالی که مطابق شکل ۴-الف بایستی پریود ۲ باشد!
(Figure-6): simulation results of Equation 7 (W_k) for logistic with $A=3.252$. Results show it is not Priod-4 but according to fig. 4-a it is proid-2 !



(شکل - ۷): روابط حاکم بر دوره تناوب "چهار" و اینکه در این تناوب بایستی نتایج معادله ۹ صفر باشند. الف. نمایش معادله ۶. ب.

نمایش معادله ۷. پ. نمایش معادله ۸. ت. نمایش معادله ۹

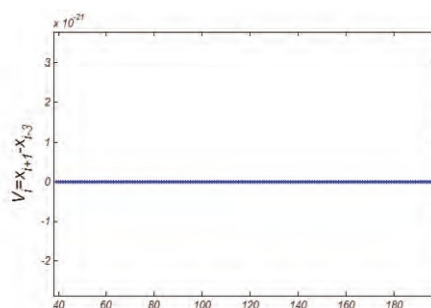
(Figure- 7): Period-4 and zero values of V_k . a. Equation 6 representation. b. Equation 7 representation. c. Equation 8 representation. d. Equation 9 representation

به دلیل محدود بودن ارقام محاسبه، شاهد تکرار خواهیم بود و رفتارهای آشوب گونه هم متناوب با دوره تناوب بسیار طولانی خواهند بود. در شرایط واقعی امکان آزمون دوره های تناوب با دوره تکرار بی نهایت وجود ندارد. درواقع طولانی ترین دوره تکرار را براساس شرایط مسأله می توان انتخاب کرد. نمودار دوشاخگی کیفی با ترسیم دوره های تناوب به دست آمده برحسب تغییرات شرط اولیه و مقدار پارامتر به دست می آید.

در معادله لاجستیک (معادله ۱) وقتی مقدار $A=3.567$ باشد، دوره تناوب سری زمانی حاصل ۳۲ خواهد بود. بنابراین پس از طی دوره گذرا (قسمت نارنجی رنگ در جدول ۱) $X_n = X_{n+32}$ می شود. با استفاده از نمودار دوشاخگی کیفی این دوره تناوب به سادگی قابل تشخیص است (شکل ۹). مقادیر سری زمانی تولید شده از طریق نگاشت لاجستیک به ازای $A=3.567$ و $X_1=0.75$ در (جدول ۱) آمده است. همان طور که در جدول مشاهده می شود، فاصله بین نقاط تکرار - که با رنگ زرد مشخص شده است - برابر ۳۲ است؛ لذا دوره تناوب این سری زمانی ۳۲ است.

۳-۴- مشاهده پنجره های متناوب جدید

در شکل (۱۰) نمودار دوشاخگی کیفی و دوشاخگی مرسوم در بازه $3.5 < A < 3.7$ با گام 0.001 مشاهده می شود. در این شکل نقاطی که به ازای پارامتر A یکسان پاسخ یکسان به دست آمده نشان داده شده اند. (به عنوان مثال وجود دوره تناوب ۱۲ به ازای $A=3.631$ یا دوره تناوب ۸ به ازای $A=3.551$ در (شکل ۱۰ سمت چپ و راست مشهود است).



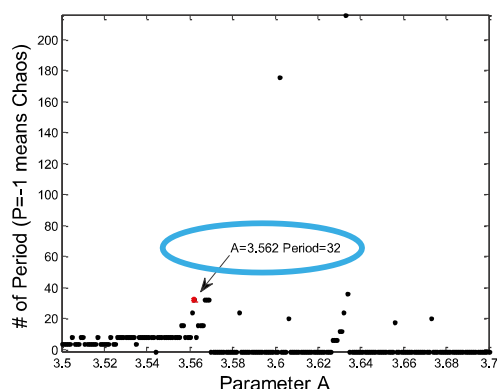
(شکل - ۸): نتایج حاصل از شبیه سازی معادله ۹ (V_k) برای لاجستیک با $A=3.252$ که حاکی از آن است به ازای این پارامتر نگاشت لاجستیک پریود ۴ است که در شکل ۴-ب (QBD) هم قابل مشاهده است.

(Figure- 8): simulation results of Equation 9 (V_k) for logistic with $A=3.252$. Results show it is period-4 that is obvious in fig. 4-b (QBD)

۳-۳- شناسایی دوره های تناوب طولانی، شبه متناوب، آشوب و ...

از آن جایی که در ترسیم نمودار دوشاخگی، به روش مرسوم فقط از مقادیر عددی نقاط سری زمانی استفاده می شود، لذا استفاده از آن به منظور افتراق دوره های تناوب بزرگ از آشوب امکان پذیر نیست.

در ترسیم نمودار دوشاخگی کیفی با تغییر مقدار پارامتر، از دوره تناوبی با تکرار "یک" شروع می کنیم. به هنگام مشاهده نخستین تکرار جستجو متوقف شده و دوره تناوب "یک" برای سری زمانی مذکور ثبت می شود. اگر یک سری زمانی، فاقد تکرار باشد، پس از بررسی دوره تناوب "یک"، به بررسی دوره تناوب "دو" و پس از آن دوره های بالاتر می پردازیم. اگر این دوره تناوب تا بی نهایت افزایش یابد



(شکل - ۹): QBD نگاشت لاجستیک به ازای $x_1=0.75$ در بازه

$$3.5 < A < 3.7$$

(Figure- 9): QBD of logistic map for $x_1=0.75$ and $3.5 < A < 3.7$

در شکل (۱۱) مقایسه QBD نمودار دوشاخگی مرسوم در نقاطی که پاسخ یکسان ندارند پرداخته‌ایم. همانطور که مشاهده می‌شود با استفاده از QBD دوره‌های تناوب و پنجره‌های متناوب جدیدی قابل مشاهده است که در نمودار دوشاخگی معمول قابل مشاهده نیست. (به‌عنوان مثال در $A=3.633$ دوره تناوب ۲۱۶ و به‌ازای $A=3.673$ دوره تناوب ۲۰ به‌دست آمده است که هیچ کدام از روی دیگرام دوشاخگی معمول قابل تشخیص نیست)

(جدول - ۱): مقادیر سری زمانی لاجستیک به ازای $A=3.567$ و مقدار اولیه $X_1=0.75$ و بررسی دوره تناوب ۳۲ - قسمت نارنجی رنگ

مربوط به دوره گذراست و قسمت سفید وضعیت پایدار نگاشت است و تکرارها یا زرد مشخص شده است.

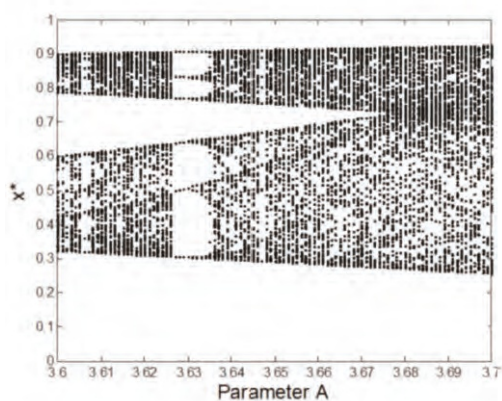
(Table-1): time series values of logistic for $A=3.567$ and $X_1=0.75$ and detection of period-32. Orang segment is transient state, white is steady state and yellow highlight is repetitions.

Time Series:	(1) 0.750000000000	0.668812500000000
0.790098846222656	0.591560766152152	0.861846505304518
0.424712369238303	0.871531433057854	0.399376994289669
0.855634163244728	0.440611327675804	(11) 0.879169139633664
0.378925133580949	0.839460907265979	0.480711365126910
0.890422892530401	0.348032065112891	0.809372798714848
0.550346977538527	0.882708303668706	0.369307041798877
(21) 0.830823323863574	0.501362996559487	0.891743373371431
0.344347940639611	0.805330280698975	0.559210788028113
0.879244392566748	0.378721554750723	0.839284918606813
0.481137448869288	(31) 0.890480876255989	0.347870552387893
0.809197603380662	0.550733535641057	0.882568928524963
0.369687500245543	0.831177533138425	0.500526581988686
0.891749010911597	0.344332185308386	(41) 0.805312784750413
0.559248897070172	0.879228289755019	0.378765120457908
0.839322604905272	0.481046225677672	0.890468571083693
0.347904830250230	0.809234800661459	0.550651480359549
(51) 0.882598603025857	0.369606508069818	0.831102215414459
0.500704508954222	0.891748229580665	0.344334368921019
0.805315209709891	0.559243615241545	0.879230522187450
0.378759080784796	(61) 0.839317381124509	0.481058870929892
0.890470280356603	0.347900068884427	0.809229634275193
0.550662877731270	0.882594484148891	0.369617750312775
0.831112672803499	0.500679807341128	(71) 0.891748351553679
0.344334028039097	0.805314831153758	0.559244439781230
0.879230173698315	0.378760023597514	0.839318196590905
0.481056896936010	0.890470013604777	0.347900811952055
(81) 0.809230440561721	0.550661099025225	0.882595127013500
0.369615995657964	0.831111040705662	0.500683662604275
0.891748332803617	0.344334080440507	0.805314889346617
0.559244313030420	(91) 0.879230227269466	0.378759878664608
0.839318071234592	0.481057200385480	0.890470054612640
0.347900697720011	0.809230316611270	0.550661372466057
0.882595028187265	0.369616265397580	(101) 0.831111291606265
0.500683069940154	0.891748335692935	0.344334072365637

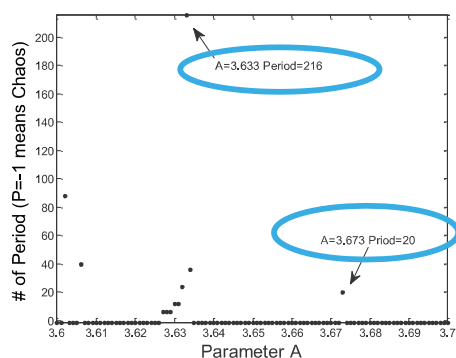
0.805314880379306	0.559244332562265	0.879230219014351
0.378759900998230	0.839318090551544	0.481057153625027
(111)0.890470048293521	0.347900715322633	0.809230335711459
0.550661330330102	0.882595043415961	0.369616223831875
0.831111252943604	0.500683161267074	0.891748335247867
0.344334073609482	(121)0.805314881760623	0.559244329553598
0.879230220285961	0.378759897557979	0.839318087575979
0.481057160827965	0.890470049266913	0.347900712611138
0.809230332769280	0.550661336820694	(131)0.882595041070144
0.369616230234624	0.831111258899171	0.500683147199145
0.891748335316429	0.344334073417870	0.805314881547833
0.559244330017078	0.879230220090072	0.378759898087944
(141)0.839318088034359	0.481057159718365	0.890470049116964
0.347900713028839	0.809230333222518	0.550661335820829
0.882595041431513	0.369616229248291	0.831111257981726
0.500683149366286	(151)0.891748335305867	0.344334073447388
0.805314881580613	0.559244329945680	0.879230220120248
0.378759898006303	0.839318087963747	0.481057159889297
0.890470049140063	0.347900712964493	(161)0.809230333152697
0.550661335974857	0.882595041375845	0.369616229400234
0.831111258123058	0.500683149032440	0.891748335307494
0.344334073442841	0.805314881575563	0.559244329956678
(171)0.879230220115600	0.378759898018880	0.839318087974625
0.481057159862964	0.890470049136505	0.347900712974406
0.809230333163453	0.550661335951128	0.882595041384421
0.369616229376826	(181)0.831111258101284	0.500683149083873
0.891748335307243	0.344334073443541	0.805314881576341
0.559244329954985	0.879230220116316	0.378759898016943
0.839318087972949	0.481057159867020	(191)0.890470049137053
0.347900712972879	0.809230333161797	0.550661335954782
0.882595041383100	0.369616229380431	0.831111258104638
0.500683149075950	0.891748335307282	0.344334073443433
(201)0.805314881576221	0.559244329955245	0.879230220116206
0.378759898017241	0.839318087973207	0.481057159866396
0.890470049136969	0.347900712973114	0.809230333162051
0.550661335954220	(211)0.882595041383303	0.369616229379877
0.831111258104122	0.500683149077169	0.891748335307276
0.344334073443450	0.805314881576240	0.559244329955205
0.879230220116222	0.378759898017196	(221)0.839318087973168
0.481057159866491	0.890470049136981	0.347900712973078
0.809230333162013	0.550661335954305	0.882595041383273
0.369616229379960	0.831111258104200	0.500683149076985
(231)0.891748335307277	0.344334073443447	0.805314881576237
0.559244329955210	0.879230220116220	0.378759898017202
0.839318087973173	0.481057159866479	0.890470049136980
0.347900712973083	(241)0.809230333162018	0.550661335954295
0.882595041383276	0.369616229379951	0.831111258104190
0.500683149077007	0.891748335307277	0.344334073443448
0.805314881576238	0.559244329955209	(251)0.879230220116221
0.378759898017200	0.839318087973172	0.481057159866482
0.890470049136980	0.347900712973081	0.809230333162016
0.550661335954298	0.882595041383275	0.369616229379953
(261)0.831111258104193	0.500683149077001	0.891748335307277
0.344334073443447	0.805314881576237	0.559244329955210
0.879230220116220	0.378759898017202	0.839318087973173
0.481057159866479	(271)0.890470049136980	0.347900712973083

0.809230333162018	0.550661335954295	0.882595041383276
0.369616229379951	0.831111258104190	0.500683149077007
0.891748335307277	0.344334073443448	(281)0.805314881576238
0.559244329955209	0.879230220116221	0.378759898017200
0.839318087973172	0.481057159866482	0.890470049136980
0.347900712973081	0.809230333162016	0.550661335954298
(291)0.882595041383275	0.369616229379953	0.831111258104193
0.500683149077001	0.891748335307277	0.344334073443447
0.805314881576237	0.559244329955210	0.879230220116220
0.378759898017202	(301)0.839318087973173	0.481057159866479
0.890470049136980	0.347900712973083	0.809230333162018
0.550661335954295	0.882595041383276	0.369616229379951
0.831111258104190	0.500683149077007	(311)0.891748335307277
0.344334073443448	0.805314881576238	0.559244329955209
0.879230220116221	0.378759898017200	0.839318087973172
0.481057159866482	0.890470049136980	0.347900712973081
(321)0.809230333162016	0.550661335954298	0.882595041383275
0.369616229379953	0.831111258104193	0.500683149077001
0.891748335307277	0.344334073443447	0.805314881576237
0.559244329955210	(331)0.879230220116220	0.378759898017202
0.839318087973173	0.481057159866479	0.890470049136980
0.347900712973083	0.809230333162018	0.550661335954295
0.882595041383276	0.369616229379951	(341)0.831111258104190
0.500683149077007	0.891748335307277	0.344334073443448
0.805314881576238	0.559244329955209	0.879230220116221
0.378759898017200	0.839318087973172	0.481057159866482
(351)0.890470049136980	0.347900712973081	0.809230333162016
0.550661335954298	0.882595041383275	0.369616229379953
0.831111258104193	0.500683149077001	0.891748335307277
0.344334073443447	(361)0.805314881576237	0.559244329955210
0.879230220116220	0.378759898017202	0.839318087973173
0.481057159866479	0.890470049136980	0.347900712973083
0.809230333162018	0.550661335954295	(371)0.882595041383276
0.369616229379951	0.831111258104190	0.500683149077007
0.891748335307277	0.344334073443448	0.805314881576238
0.559244329955209	0.879230220116221	0.378759898017200
(381)0.839318087973172	0.481057159866482	0.890470049136980
0.347900712973081	0.809230333162016	0.550661335954298
0.882595041383275	0.369616229379953	0.831111258104193
0.500683149077001	(391)0.891748335307277	0.344334073443447
0.805314881576237	0.559244329955210	0.879230220116220
0.378759898017202	0.839318087973173	0.481057159866479
0.890470049136980	0.347900712973083	(401)0.809230333162018
0.550661335954295	0.882595041383276	0.369616229379951
0.831111258104190	0.500683149077007	0.891748335307277
0.344334073443448	0.805314881576238	0.559244329955209
(411)0.879230220116221	0.378759898017200	0.839318087973172
0.481057159866482	0.890470049136980	0.347900712973081
0.809230333162016	0.550661335954298	0.882595041383275
0.369616229379953	(421)0.831111258104193	0.500683149077001
0.891748335307277	0.344334073443447	0.805314881576237
0.559244329955210	0.879230220116220	0.378759898017202
0.839318087973173	0.481057159866479	(431)0.890470049136980
0.347900712973083	0.809230333162018	0.550661335954295
0.882595041383276	0.369616229379951	0.831111258104190
0.500683149077007	0.891748335307277	0.344334073443448

(441)0.805314881576238	0.559244329955209	0.879230220116221
0.378759898017200	0.839318087973172	0.481057159866482
0.890470049136980	0.347900712973081	0.809230333162016
0.550661335954298	(451)0.882595041383275	0.369616229379953
0.831111258104193	0.500683149077001	0.891748335307277
0.344334073443447	0.805314881576237	0.559244329955210
0.879230220116220	0.378759898017202	(461)0.839318087973173
0.481057159866479	0.890470049136980	0.347900712973083
0.809230333162018	0.550661335954295	0.882595041383276
0.369616229379951	0.831111258104190	0.500683149077007
(471)0.891748335307277	0.344334073443448	0.805314881576238
0.559244329955209	0.879230220116221	0.378759898017200
0.839318087973172	0.481057159866482	0.890470049136980
0.347900712973081	(481)0.809230333162016	0.550661335954298
0.882595041383275	0.369616229379953	0.831111258104193
0.500683149077001	0.891748335307277	0.344334073443447
0.805314881576237	0.559244329955210	(491)0.879230220116220
0.378759898017202	0.839318087973173	0.481057159866479
0.890470049136980	0.347900712973083	0.809230333162018
0.550661335954295	0.882595041383276	0.369616229379951
(501) 0.831111258104190		



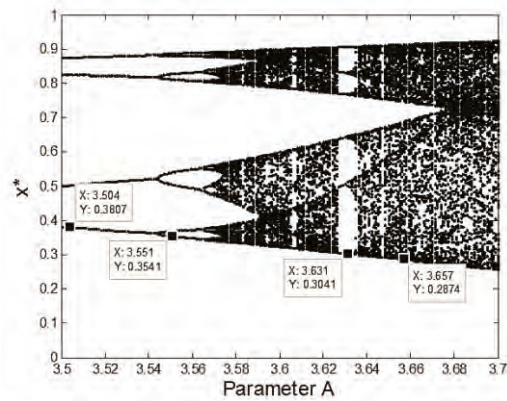
الف



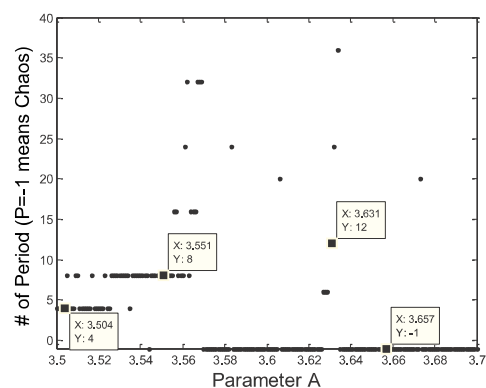
ب

(شکل- ۱۱): مقایسه QBD و نمودار دوشاخگی مرسوم در نقاطی که پاسخ یکسان ندارند.

(Figure- 11): comparison of QBD with conventional bifurcation diagram (while not having the same response) a. conventional b. QBD



الف



ب

(شکل- ۱۰): مقایسه QBD و نمودار دوشاخگی مرسوم به ازای $X_1=0.42$ (وقتی پاسخ یکسان دارند). الف. معمول ب. QBD

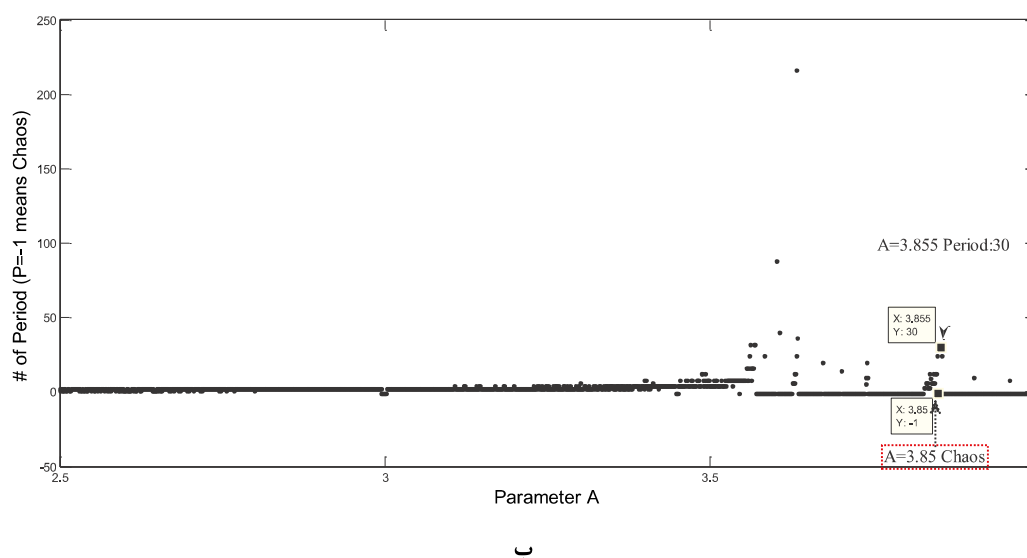
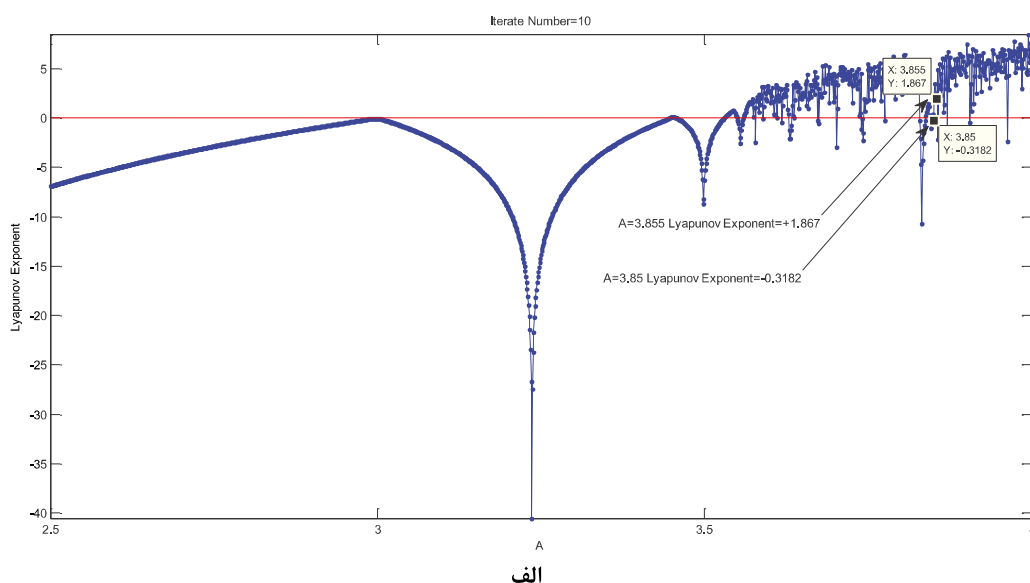
(Figure- 10): comparison of QBD and conventional bifurcation diagram for $X_1=0.42$ (when they both have the same response) a. conventional b. QBD

۳-۵- ارزیابی صحت مقادیر نمای لیپانوف

از مقایسه نمودار کیفی با نمودار نمای لیپانوفی که با استفاده از فرمول (۴) محاسبه شده است، نکات قابل تأملی حاصل شد. نخست این که با وجود آشوب گونه بودن رفتارنگاشت به ازای مقادیری خاص از پارامتر، نمای لیپانوف محاسبه شده منفی است که نشان دهنده وجود یک رفتار متناوب است. نکته دوم مثبت بودن نمای لیپانوف در برخی از مقادیر پارامتر که رفتار نگاشت متناوب است. به عنوان مثال در $A=3.8555$ نمای لیپانوف مثبت است (به عبارت دیگر بایستی نگاشت آشوب ناک باشد) در حالی که سری زمانی متناوب با با دوره تناوب 60 و نمای لیپانوف به ازای $A=3.85$

منفی است در حالی که رفتار نگاشت آشوب گونه است (شکل ۱۲). این اختلاف ممکن است، مربوط به روش محاسبه نمای لیپانوف و جزئیات آن از قبیل تعداد نمونه‌ها (n) یا نقطه شروع (x_0) باشد. در ادامه نمای لیپانوف به ازای مقادیر مختلف n و x_0 محاسبه و نتایج تکرار شد.

بنابراین صحت فرمول (۴) را مورد بررسی قرار دادیم. نخستین نکته دور شدن نمایی دو تراژکتوری از هم است که از مفاهیم خطی سازی وام گرفته شده و با پویایی لاجستیک تطابق ندارد. نکته دوم جایگزین کردن تفاضل با مشتق معادله نگاشت است.



(شکل ۱۲): بررسی نمای لیپانوف در نمودار دوشاخگی مرسوم و QBD و وجود نقطه $A=3.855$ با نمای لیپانوف مثبت اما پریود 30 و نقطه

$A=3.85$ با نمای لیپانوف منفی اما با رفتار آشوبی که در نمودار QBD بخوبی قابل مشاهده است. الف. نمای لیپانوف ب. QBD

(Figure- 12): Lyapunov Exponent (LE) for conventional and QBD and exciting points with positive LE but period-30 (at $A=3.855$) and negative LE but chaotic behavior that is crystal clear in QBD. a. LE b. QBD

داشته باشد. نکته دوم که باعث نادرست بودن معادله ۴ می‌شود، این است که در یک سری زمانی آشوب گونه مقدار فاصله با گذشت چند تکرار بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و دیگر مشتق، تقریب مناسبی نیست.

۳-۶- مقایسه نمودار دوشاخگی کیفی با تحلیل کمی سازی بازگشت

بازگشت یک مشخصه اساسی برای بسیاری از سامانه‌های پویای پیچیده است [19]. مفهوم رسمی بازگشت‌ها نخستین بار توسط هانری پوانکاره در سال ۱۸۹۰ ارائه شد [20]. با این وجود مباحث مطرح شده توسط پوانکاره تا مدت‌ها به دلیل فقدان ابزار پردازشی مناسب مسکوت ماند [8]. یکی از کاربردهای مهم پوانکاره در سالهای اخیر کاربرد آن در پردازش سیگنال جهت استخراج اطلاعات است [21]، [22]. در سال ۱۹۸۷ روش منحنی‌های بازگشتی (RQA^۲) به منظور تجسم دیداری بازگشت سامانه‌های پویا ارائه شد [23]. در منحنی‌های بازگشتی سه ساختار با مقیاس کوچک شامل خطوط عمودی، خطوط قطری و نیز نقاط منفرد قابل مشاهده است.

۱- نقاط منفرد: در نمودار بازگشتی نشان‌دهنده کم‌بودن حالات سامانه یا عدم باقی‌ماندن آنها در طول زمان و یا عدم ثبات و نوسان حالات است.

۲- خطوط قطری: یک خط قطری به طول L هنگامی به وقوع می‌پیوندد که یک قسمت از تراژکتوری، به‌طور تقریبی، موازی با قسمتی دیگر از تراژکتوری پیموده شود.

۳- خطوط عمودی: یک خط عمودی با طول V نشان‌دهنده ظهور وضعیتی پایدار به مدت V واحد زمانی است. به بیانی دیگر سامانه برای چند لحظه در تله گیر کرده است.

به‌منظور بررسی کمی ساختارهای موجود در منحنی‌های بازگشتی ویژگی‌های متعددی در مقالات ارائه شده است. [24] از این میان با توجه به بحث عدم قطعیت سری‌های زمانی آشوب‌گونه حاصل از نگاشت‌های بازگشتی تنها به ویژگی قطعیت^۳ بسنده می‌کنیم.

قطعیت: این ویژگی عبارت است از نسبت نقاط بازگشتی که از ساختار قطری (با طول حداقل L_{min}) پیروی می‌کنند، به کل نقاط بازگشتی:

دو سری زمانی x و x' را در نظر بگیرید، در ابتدا فاصله بین نقاط مقدار کمی مانند d است؛ به دلیل عدم پیوستگی، نگاشت لاجستیک مشتق‌پذیر نیست. علاوه‌براین در یک نگاشت، محاسبه تفاضل^۱ با استفاده از معادله، امکان‌پذیر نیست. بنابراین اختلاف بین تراژکتوری‌ها را با روابط زیر دنبال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x'_k - x_k &= |d_0| \\ x'_{k+1} - x_{k+1} &= |d_1| \\ \dots \\ x'_{k+n} - x_{k+n} &= |d_n| \end{aligned} \quad (10)$$

حال سعی می‌کنیم $|d_1|$ را از $|d_0|$ محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} x'_{k+1} &= Ax'_k (1 - x'_k) \\ x_{k+1} &= Ax_k (1 - x_k) \\ x'_{k+1} - x_{k+1} &= Ax'_k (1 - x'_k) - Ax_k (1 - x_k) \\ &= A(x'_k - x_k^2 - x_k + x_k^2) \\ &= A(x'_k - x_k)(1 - (x'_k + x_k)) \\ &= Ad_0(1 - (x'_k - x_k + 2x_k)) \\ x'_{k+1} - x_{k+1} &= Ad_0(1 - d_0 - 2x_k) = d_1 \end{aligned} \quad (11)$$

اگر سری زمانی، آشوب‌گونه باشد؛ انتظار می‌رود که $|d_1| > |d_0|$ باشد و اگر آشوبناک نباشد؛ بایستی داشته باشیم: $|d_1| > |d_0|$.

بنابراین لازم است $|A(1 - d_0 - 2x_k)| < 1$ باشد تا سری متناوب باشد. مقدار A برای یک سری زمانی مشخص است؛ اما x_k دارای مقداری دلخواه است که باید در شرط زیر صدق کند. (با فرض کوچک بودن d_0 که شرط استفاده از مشتق در فرمول (۴) است.

$$0.5\left(1 - \frac{1}{A}\right) < x_k < 0.5\left(1 + \frac{1}{A}\right) \quad (12)$$

بنابراین برای رسیدن به نقطه پایدار $X^* = 1 - \frac{1}{A}$ (معادله ۲) داریم:

$$x_k = 1 - \frac{1}{A}$$

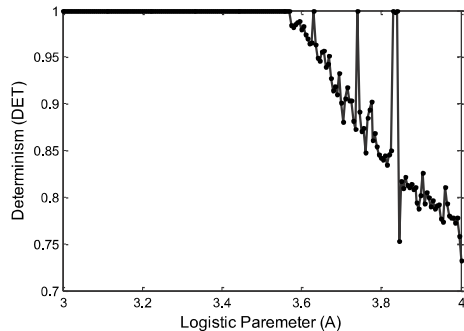
آن‌گاه محدوده‌ای که به‌ازای آن نگاشت در نقطه مذکور پایدار است، یعنی $1 < A < 3$ به‌دست خواهد آمد. شرط اخیر در محاسبه نمای لیاپانوف وجود ندارد. به همین ترتیب باید شرایط مشابهی برای x های بعدی وجود

¹ Difference

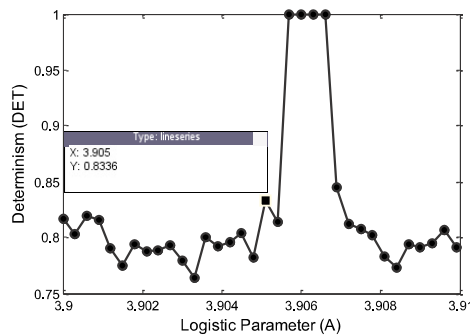
² Recurrent Quantification Analysis

³ Determinist

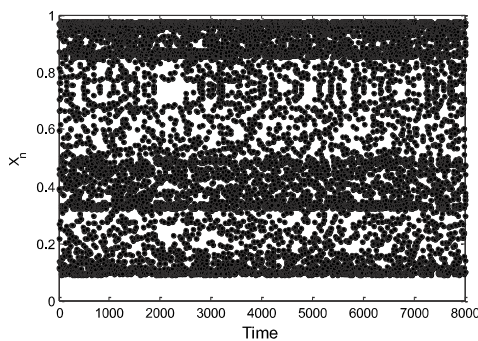
و تصادفی است و با اندکی نوفه به شدت پارامترها تحت تأثیر قرار می‌گیرند. اگر چه در نگاه کلی معیار DET (به‌عنوان پر کاربردترین ویژگی استخراج‌شده از RQA و بر گرفته از خطوط قطری) می‌تواند درست باشد اما در جزئیات نمی‌تواند رفتار را توصیف کند.



الف



ب



پ

(شکل-۱۳): منحنی تغییرات معیار DET در منحنی‌های

بازگشتی برای نگاشت لاجستیک به ازای تغییرات پارامتر A

الف. $3 < A < 4$ ب. $3.9 < A < 3.91$ پ. نمودار زمانی

(Figure-13): DET variation in recurrent plot of logistic map for variation of a. $3 < A < 4$ b. $3.9 < A < 3.91$ c. time plot

۴- بحث و بررسی

در این مقاله QBD به‌عنوان یک روش جدید که مبتنی بر نگاه کیفی به دوشاخگی است، معرفی شد. این روش به‌دلیل کیفی بودن (نه مانند روش مرسوم که کمی است) ویژگی‌های بارز زیادی دارد و در مطالعات مبتنی بر نگاشت می‌تواند

$$DET = \frac{\sum_{l=Lmin}^N Lp(l)}{\sum_{l=1}^N lp(l)} \quad (13)$$

که در معادله ۱۲، $p(l)$ هیستوگرام خطوط قطری به طول l است. پیدایش خطوط قطری در منحنی‌های بازگشتی به‌علت حرکت موازی دو قطعه از تراژکتوری است [24].

اگرچه ویژگی‌های دیگری نیز به‌منظور تحلیل کمی‌سازی بازگشت‌ها معرفی شده است، می‌توان قطعیت را پرکاربردترین آنها دانست. برای ارزیابی قابلیت استفاده از این ویژگی در تحلیل پویایی سامانه‌های آشوب‌گونه آزمایش زیر را طراحی کردیم. در این آزمایش از دو سری زمانی استفاده شده است. (۱) سری زمانی تولید شده توسط نگاشت بازگشتی لاجستیک در حالت آشوب. (۲) سری زمانی سینوسی. هدف مقایسه مقدار ویژگی مورد نظر در دینامیک آشوب نسبت به مقدار آن در دینامیک قطعی سری زمانی سینوسی است.

نتایج شبیه‌سازی انجام‌شده برای معادله لاجستیک با

شرط اولیه $x_0 = 1 + \frac{1}{A} + 0.02$ (برای قرارگیری سریع در بستر جذب) و تعداد 2000 نمونه، در شکل (۱۳) نمایش داده شده است. بررسی نمودار شکل (۱۳) دو نکته مهم را در بر دارد:

(۱) با افزایش پارامتر A مقدار DET به‌طور نسبی کاهش می‌یابد؛ به‌عبارت دیگر افت نمودار را شاهد هستیم. (شکل ۱۳-الف)

(۲) در (شکل ۱۳-ب) محدوده تغییرات A را بسیار کوچک‌تر ($3.91 < A < 3.9$) در نظر گرفته‌ایم؛ مشاهده می‌شود در $A=3.9051$ مقدار معیار قطعیت 0.8336 است. ($DET=0.8336$) حال به بررسی و مقایسه پاسخ به‌دست آمده از پاسخ سینوسی با فرکانس 80Hz و فرکانس نمونه‌برداری 1000Hz در سیگنالی به طول 8000 نمونه می‌پردازیم. نتایج حاکی از آن است که مقدار معیار قطعیت 0.8828 است ($DET=0.8828$) و نکته مهم این است که نگاشت لاجستیک در $A=3.9051$ رفتار آشوبگون دارد؛ درحالی‌که تفاوت چندانی از نظر معیار DET با سیگنال سینوسی ندارد. (شکل ۱۳-پ) با افزودن نوفه سفید با $SNR=20dB$ به سیگنال سینوسی با دامنه یک و فرکانس 80Hz مقدار معیار قطعیت به 0.2821 کاهش می‌یابد ($DET=0.2821$). نکته مهم در RQA عدم تمایز بین سیگنال آشوبی

تأثیرگذار باشد. سؤال مهمی که منجر به ابداع QBD شد، این بود که اگر به عنوان مثال دوره تناوب 150 داشته باشیم و صد نمونه آخر در دوشاخگی برداشته شده باشد، تکلیف چیست؟ این صد نمونه را در نمودار دوشاخگی با صد نقطه نمایش می دهند و ممکن است چنین تصور شود که دارای رفتار آشوب گونه است. همچنین در مقادیری مثل $A=3.252$ به دلیل خطای تعداد ارقام اعشار، به نظر می رسد متناوب با دوره تناوب دو است. شاید سؤال شود، این دقت کجا لازم است؟ در پاسخ باید به وجود ابر رایانه ها اشاره کرد که به علت تعداد بیت های محاسباتی بالاتر در محاسبات دقیق مورد استفاده قرار می گیرند. علاوه بر آن، فقط اشکال در دقت و تعداد اعشار نیست؛ بلکه نشان داده شد، برخلاف نمودارهای دوشاخگی مرسوم نظمی که در نمودار دوشاخگی کیفی دیده می شود، یک نظم موزاییکی (نظمی که با چینش اجزا در کنار هم حاصل می شود و از اندرکنش پدید نیامده) نیست؛ زیرا نگاشت لاجستیک ویژگی هایی دارد که در نمودار دوشاخه شدگی مرسوم قابل مشاهده نیست. (به عنوان مثال می توان به دوره تناوب های بزرگ و پنجره های متناوب جدیدی اشاره کرد که در دیاگرام دوشاخه شدگی مرسوم قابل مشاهده نیست.)

به طور خلاصه QBD ویژگی های منحصر به فردی دارد که برخی از آنها عبارتند از: ۱- شناسایی مقادیر شرط اولیه و پارامتر که نگاشت در آنها پایدار است. ۲- تشخیص صحیح دوره تناوب. ۳- شناسایی دوره تناوب های بزرگ، شبه متناوب، آشوب و ... ۴- مشاهده پنجره های متناوب جدید. ۵- امکان ارزیابی نمای لیپانوف. ۶- هزینه محاسباتی بسیار پایین تر از روش های مرسوم. ۷- امکان نمایش در دو بعد و یا سه بعد نمودار دوشاخگی که به تفصیل در خصوص آنها توضیح داده شد.

در بررسی نمای لیپانوف نگاشت لاجستیک به ازای مقادیر مختلف پارامتر A ، به سری های زمانی متناوبی برخورد کردیم که نمای لیپانوف مثبت داشتند و سری های زمانی آشوب گونی که نمای لیپانوف مثبت داشتند. علت بروز چنین اختلافی را می توان در تصور دور شدن نمایی دو تراژکتوری در لیپانوف از هم دانست که از مفاهیم خطی سازی وام گرفته شده و با دینامیک لاجستیک تطابق ندارد؛ علاوه بر این می توان به نادرستی قراردادن مشتق معادله نگاشت به جای تفاضل به علت ماهیت گسسته آن اشاره کرد.

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش نمودار دوشاخه شدگی کیفی به عنوان یک

جایگزین مناسب برای نمودارهای دوشاخه شدگی معمول معرفی شد. نمودار دوشاخگی کیفی ویژگی های خاصی دارد که برخی از آنها عبارتند از: (۱) شناسایی مقادیری از شرط اولیه و پارامتر که نگاشت به ازای آن مقادیر پایدار است. (۲) تشخیص صحیح دوره های تناوب. (۳) شناسایی دوره های تناوب طولانی، شبه متناوب، آشوب و ... (۴) مشاهده پنجره های متناوب جدید. (۵) امکان بررسی دقیق نمای لیپانوف. (۶) هزینه محاسباتی بسیار پایین تر از روش های مرسوم. (۷) امکان نمایش نمودار دوشاخگی در دو و یا سه بعد. با توجه به ویژگی های ذکر شده و کاربرد وسیع نگاشت ها در علوم مختلف، به خصوص در مدل سازی های مبتنی بر نگاشت، نمودار دوشاخگی کیفی می تواند ابزاری قدرتمند برای بررسی رفتار نگاشت ها باشد.

با استفاده از نمودار دوشاخه شدگی کیفی، بدون داشتن اطلاعات خاصی از نگاشت، حتی امکان ترسیم نمودار دوشاخگی دو بعدی (نمودار دوشاخگی بر حسب تغییرات دو پارامتر) و بررسی مقادیری از پارامتر که نگاشت در آن پایداری می ماند، وجود دارد. نکته دیگری که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت، نمای لیپانوف، به عنوان یکی از ابزارهای کمی سازی آشوب است که به صورت تحلیلی و عددی (با استفاده از نمودار دوشاخه شدگی کیفی) به اشکالات این روش اشاره شد. در پایان نیز بررسی تحلیل کمی سازی بازگشت با استفاده از نمودار دوشاخگی کیفی، حاکی از آن است که اگر چه در نگاه کلی معیار DET (به عنوان پر کاربردترین ویژگی استخراج شده از RQA و بر گرفته از خطوط قطری) می تواند درست باشد، اما در جزئیات نمی تواند رفتار را توصیف کند.

6 - Reference

۶- مراجع

- [1] D. Gulick, *Encounters with chaos*: McGraw-Hill, 1992.
- [2] M. Ausloos, and M. Dirickx, *The logistic map and the route to chaos: from the beginnings to modern applications*: Springer Science & Business Media, 2006.
- [3] B. Ibarz, J. M. Casado, and M. A. Sanjuán, "Map-based models in neuronal dynamics," *Physics Reports*, vol. 501, no. 1, pp. 1-74, 2011.
- [4] E. M. Izhikevich, "Which model to use for cortical spiking neurons?," *IEEE transactions*

Demand, 2000.

- [16] J. A. Gallas, and H. E. Nusse, "Periodicity versus chaos in the dynamics of cobweb models," *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. 29, no. 3, pp. 447-464, 1996.
- [17] A. Chen, J. Lu, J. Lü, and S. Yu, "Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 364, pp. 103-110, 2006.
- [18] M. Özer, A. Čenys, Y. Polatoglu, G. Hacibekiroglu, E. Akat, A. Valaristos, and A. Anagnostopoulos, "Bifurcations of Fibonacci generating functions," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 33, no. 4, pp. 1240-1247, 2007.
- [19] S. Schinkel, N. Marwan, and J. Kurths, "Brain signal analysis based on recurrences," *Journal of Physiology-Paris*, vol. 103, no. 6, pp. 315-323, 2009.
- [20] H. Poincaré, "Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique," *Acta mathematica*, vol. 13, no. 1, pp. A3-A270, 1890.
- [21] G. Sadeghi Bajestani, A. Sheikhan, M. R. Hashemi Golpayegani, F. Ashrafzadeh, and P. Hebrani, "A Hierarchical Model for Autism Spectrum Disorder (HMASD)," *Razavi Int J Med*, vol. 4, no. 3, pp. e39107, 2016.
- [22] G. Sadeghi Bajestani, M. R. Hashemi Golpayegani, A. Sheikhan, and F. Ashrafzadeh, "Poincaré Section analysis of the electroencephalogram in Autism Spectrum Disorder using Complement Plots," *Kybernetes*, vol. 46, no. 2, 2017.
- [23] J.-P. Eckmann, S. O. Kamphorst, and D. Ruelle, "Recurrence plots of dynamical systems," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 4, no. 9, pp. 973, 1987.
- [24] N. Marwan, and A. Meinke, "Extended recurrence plot analysis and its application to ERP data," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 14, no. 02, pp. 761-771, 2004.
- [5] M. Courbage, and V. I. Nekorkin, "Map based models in neurodynamics," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, no. 06, pp. 1631-1651, 2010.
- [6] F. Mukhamedov, and W. N. F. A. W. Rozali, "On a p-adic cubic generalized logistic dynamical System." p. 012012.
- [7] N. K. Pareek, V. Patidar, and K. K. Sud, "Image encryption using chaotic logistic map," *Image and vision computing*, vol. 24, no. 9, pp. 926-934, 2006.
- [8] G. S. Bajestani, A. Sheikhan, S. M. R. H. Golpayegani, F. Ashrafzadeh, and P. Hebrani, "A New Approach for Solving Nonlinear Differential Equations with Poincare Map and Poincare Section," *Majlesi Journal of Electrical Engineering*, vol. 10, no. 3, pp. 33, 2016.
- [9] M. Girardi-Schappo, M. Tragtenberg, and O. Kinouchi, "A brief history of excitable map-based neurons and neural networks," *Journal of neuroscience methods*, vol. 220, no. 2, pp. 116-130, 2013.
- [10] G. Sadeghi Bajestani, A. Sheikhan, S. M. R. Hashemi Golpayegani, F. Ashrafzadeh, and P. Hebrani, "A systematic review, on the application of quantitative EEG for characterizing autistic brain," *Modern Rehabilitation*, vol. 9, no. 6, pp. 10-28, 2016.
- [11] A. L. Lloyd, "The coupled logistic map: a simple model for the effects of spatial heterogeneity on population dynamics," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 173, no. 3, pp. 217-230, 1995.
- [12] M. J. Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations," *Journal of statistical physics*, vol. 19, no. 1, pp. 25-52, 1978.
- [13] D. S. M. R. H. Golpayegani, *Chaos and its application* Amirkabir University of Technology, 2015.
- [14] T.-Y. Li, and J. A. Yorke, "Period three implies chaos," *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, no. 10, pp. 985-992, 1975.
- [15] R. C. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*: Oxford University Press on

پژوهش در پلی‌تکنیک تهران پرداخت. زمینه پژوهش او سایبرنتیک، دینامیک غیرخطی، آشوب و فرکتال، مدل‌سازی زیستی و بیولوژی سیستمی است و از وی به‌عنوان پدر علم مهندسی پزشکی ایران یاد می‌شود. ایشان هدایت‌کننده آزمایشگاه سامانه‌های سایبرنتیکی و گروه تحقیقاتی سامانه‌های سایبرنتیکی دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) می‌باشند.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

m.r.hashemig@aut.ac.ir



قاسم صادقی بجستانی در سال

۱۳۸۴ مدرک کارشناسی خود را در

رشته برق و در سال ۱۳۸۶ مدرک

کارشناسی ارشد و در سال ۱۳۹۵

مدرک دکترای خود را - هر دو در

رشته مهندسی پزشکی گرایش بیوالکتریک- دریافت کرد. ایشان عضو هیأت علمی دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) بوده و زمینه مورد علاقه وی نیز سایبرنتیک، کل نگری و آشوب با گرایش به تحلیل سیگنال EEG در اختلال طیف اوتیسم است. وی در گروه‌های تحقیقاتی علوم اعصاب و سیستم‌های سایبرنتیکی و مرکز تحقیقات مهندسی پزشکی مشغول پژوهش است و در زمینه ساخت تجهیزات پزشکی نیز در آزمایشگاه سیستم‌های سایبرنتیکی دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) فعال است.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

g.sadeghi@imamreza.ac.ir



عباس منزوی در سال ۱۳۸۰ مدرک

کارشناسی خود را در رشته برق و در

سال ۱۳۹۱ مدرک کارشناسی ارشد

خود را در رشته مهندسی پزشکی

گرایش بیوالکتریک دریافت کرده است.

وی اکنون دانشجوی دکترای دانشگاه شاهد بوده و زمینه مورد علاقه ایشان نیز سایبرنتیک، کل نگری و آشوب است و گرایش به تحلیل سیگنال EEG در بیماری صرع دارد. وی یکی از افراد فعال در آزمایشگاه سیستم‌های سایبرنتیکی دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) است.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

abas_monzavi@yahoo.com



سید محمد رضا هاشمی گلپایگانی

وی از چهره‌های ماندگار کشور است که

کارشناسی ارشد خود را در سال ۱۳۴۷

در رشته برق و کارشناسی ارشد دیگری

در سال ۱۳۵۱ در آمریکا در رشته

مهندسی کنترل گذرانده است. وی دوره

دکترای خود را در رشته مهندسی پزشکی و در آمریکا گذرانده است. وی در تابستان سال ۱۳۵۶ به ایران بازگشت و به تدریس و

سال ۱۳۹۵ شماره ۳ پیاپی ۲۹