رفع نوفهٔ ویدئو توسط تبدیل قیچک قطعه‌ای

حجت باقرزاده[۱]، احد هراتی[۲*]، زهرا امیری[۳] و رجبعلی کامیابی گل[۴]
[۱و۲] گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران
[۳و۴] گروه ریاضیات محض، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

چکیده

از روش‌های معمول در بهره‌برداری از نظام‌مندی‌ها و ویژگی‌های هندسی در سیگنال‌های چندبعدی می‌توان به استفاده از اتساع ناهمسان‌گرد[۱] و مقیاس‌بندی سهموی[۲] اشاره کرد که اساس تبدیلاتی همانند قیچک[۳] و پیچک[۴] را شکل می‌دهند. در چنین تبدیل‌هایی تحلیل کاملی از سیگنال ورودی صورت می‌پذیرد که با رشد تعداد ابعاد[۵] داده، افزونگی آن به‌صورت نمایی زیاد شده و امکان پیاده‌سازی و استفاده عملی از آن‌ها را به‌شدت محدود می‌کند. در مقابل تبدیل‌های جدایی‌پذیر هر بعد داده ورودی را جداگانه مورد پردازش قرار می‌دهند که منجر به نادیده‌گرفته‌شدن نظام‌مندی‌های چندبعدی آن خواهد شد. با توجه به برتری نسبی تبدیل قیچک در مواجهه با داده‌های گسسته و برای چیره‌شدن بر مشکلات پیچیدگی زمانی و افزونگی[۶] تبدیل قیچک کلاسیک در تحلیل داده‌های چندبعدی، در این مقاله ویرایش جدیدی از تبدیل قیچک گسسته با قابلیت کنترل افزونگی ارائه می‌شود. به‌بیان‌دیگر با رویکرد جدید، به‌دنبال امکان برقراری مصالحه بهتر بین افزونگی و پیچیدگی زمانی تبدیل از یک‌سو با میزان کامل‌بودن تحلیل و بهره‌برداری آن از نظام‌مندی‌های ورودی از سوی دیگر هستیم. در این راستا ماتریس اتساع به‌صورت قطری قطعه‌ای کاهش داده می‌شود که به معنای عملکرد مستقل تحلیل حاصل در زیرفضاهای متناظر با قطعه‌های مجزا خواهد بود. بدین ترتیب، شیوه تجزیه ماتریس اتساع به زیرقطعه‌ها، ابزار کنترلی مناسبی برای میزان افزونگی و پیچیدگی محاسباتی تبدیل حاصل به‌دست می‌دهد. به‌عنوان یک نمونه از کاربرد عملی رویکرد پیشنهادی، در این مقاله روشی برای رفع نوفهٔ[۷] ویدئو با استفاده از تبدیل قیچک قطعه‌ای ارائه‌شده و با تبدیل قیچک کلاسیک دو و سه‌بعدی مقایسه می‌شود. نتایج حاکی از آن است که رویکرد پیشنهادی با مصرف جزئی از زمان و حافظه تبدیل سه‌بعدی افزایش کیفیت قابل‌توجهی نسبت به تبدیل دوبعدی می‌تواند ارائه کند.

واژگان کلیدی: ماتریس اتساع ناهمسانگرد، تبدیل پیچک، تبدیل قیچک چندبعدی، ماتریس اتساع قطری قطعه‌ای، رفع نویز ویدئو.

Video Denoising Using block Shearlet Transform

Hojjat Bagherzadeh[1], Ahad Harati[2*], Zahra Amiri[3] & RajabAli KamyabiGol[4]
[1,2]Department of Computer Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran
[3,4]Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

Abstract

Parabolic scaling and anisotropic dilation form the core of famous multi-resolution transformations such as curvelet and shearlet, which are widely used in signal processing applications like denoising. These non-adaptive geometrical wavelets are commonly used to extract structures and geometrical features of multi-dimensional signals and preserve them in noise removal treatments. In discrete setups, it is shown that

[1] Anisotropic Dilations
[2] Parabolic
[3] Shearlets
[4] Curvelets
[5] Dimensions
[6] Redundancy
[7] Denoising

* Corresponding author

* نویسندهٔ عهده‌دار مکاتبات

shearlets can outperform other rivals since in addition to scaling, they are formed by shear operator which can fully remain on integer grid. However, the redundancy of multidimensional shearlet transform exponentially grows with respect to the number of dimensions which in turn leads to the exponential computational and space complexity. This, seriously limits the applicability of shearlet transform in higher dimensions. In contrast, separable transforms process each dimension of data independent of other dimensions which result in missing the informative relations among different dimensions of the data.

Therefore, in this paper a modified discrete shearlet transform is proposed which can overcome the redundancy and complexity issues of the classical transform. It makes a better tradeoff between completeness of the analysis achieved by processing full relations among dimensions on one hand and the redundancy and computational complexity of the resulting transform on the other hand. In fact, how dilation matrix is decomposed and block diagonalized, gives a tuning parameter for the amount of inter dimension analysis which may be used to control computation complexity and also redundancy of the resultant transform.

In the context of video denoising, three different decompositions are proposed for 3x3 dilation matrix. In each block diagonalization of this dilation matrix, one dimension is separated and the other two constitute a 2D shearlet transform. The three block shearlet transforms are computed for the input data up to three levels and the resultant coefficients are treated with automatically adjusted thresholds. The output is obtained via an aggregation mechanism which combine the result of reconstruction of these three transforms. Using experiments on standard set of videos at different levels of noise, we show that the proposed approach can get very near to the quality of full 3D shearlet analysis while it keeps the computational complexity (time and space) comparable to the 2D shearlet transform.

Keywords: anisotropic dilation matrix, curvelet transform, multidimensional shearlet transform, block diagonal dilation matrix, video denoising

۱- مقدمه

سامانه‌های بازنمایی[۱] نقشی کلیدی در کارایی قابل حصول در کاربردهای پردازش تصویر مانند فشرده‌سازی [1, 2]، تجزیه به چند منبع [3, 4]، رفع نوفه [5, 6] و ... دارند. از شاخص‌ترین خصوصیات سامانه‌های بازنمایی که تاکنون مورد توجه بیشتر پژوهش‌گران بوده است به محلی‌بودن، مقیاس‌پذیربودن، توانایی تطبیق مناسب جهت، قابلیت گسسته‌سازی و افزونگی مناسب می‌توان اشاره کرد. این ویژگی‌ها قابلیت ارائه تقریب‌های پراکنده و مناسب از توابع با نقاط تکین را به‌دست می‌دهند. سامانه‌های بازنمایی بایستی قادر باشند تا جای ممکن اطلاعات تصویر اصلی را فشرده و فقط با تعداد ضریب کمی بیان کنند تا توصیف و مدل‌سازی اطلاعات ساده شود. تبدیلات و روش‌های جدیدتر در این حوزه سعی دارند تا تغییرات سیگنال‌های چندبعدی را در سطح هندسی بالاتری از نقطه، یعنی در سطح خطوط و حجم مدل‌سازی کنند.

در این مقاله رفع نوفهٔ ویدئو به‌عنوان مثالی از پردازش سیگنال‌های چندبعدی موردبررسی قرارگرفته است. هدف از رفع نوفهٔ ویدئو بهبود نمایش آن برای انسان است؛ به‌گونه‌ای که یک تخمین قابل‌قبول از ویدئوی اصلی از روی ویدئوی نوفه‌ای یا تخریب‌شده به‌دست آید. این مسئله یک نمونه از مسائل معکوس[۲] است که در آن به‌طورمعمول از مدل نوفهٔ جمع‌شونده استفاده می‌شود.

در طول سال‌های گذشته، سامانه‌های بازنمایی متفاوتی برای انجام چنین تحلیل‌هایی ارائه شده‌اند. برای مثال، بر اساس اتساع ناهمسان‌گرد و مقیاس‌بندی سهموی تبدیلات پیچک و قیچک [7, 8, 9, 5, 2, 6] ارائه شده‌است که قابلیت تقریب بهینه توابع قطعه‌ای هموار[۳] را دارند. این سامانه‌ها علاوه بر پارامترهای مکان و مقیاس، پارامتر دیگری به نام جهت نیز دارند. در این بین، سامانهٔ قیچک با توجه به قابلیت گسسته‌سازی مناسب‌تر نسبت به سایر سامانه‌های بازنمایی با مقیاس‌بندی سهموی، برتری دارد.

با توجه به حجم روزافزون داده‌های چندبعدی، روش‌های تحلیل و بازنمایی داده با استفاده از سامانه‌های بازنمایی برای بیشتر از دو بعد موردتوجه قرارگرفته است. در همین راستا، مشکل اصلی تبدیل قیچک با توجه به ساختار افزونه آن، افزایش نمایی افزونگی به نسبت تعداد ابعاد داده است که منجر به افزایش بیش‌ازحد پیچیدگی زمانی و حافظه‌ای می‌شود. در تبدیل قیچک چندبعدی کلاسیک به‌ازای هر بعدِ کلیهٔ جهت‌ها و موقعیت‌ها در نظر گرفته می‌شود؛ به‌گونه‌ای که ابعاد ماتریس اتساع[۴] و برش[۵] برای هر بعد افزایش می‌یابد.

[1] Representation System
[2] Inverse Problems
[3] Piecewise Smooth
[4] Dilation
[5] Shear

نکته حائز اهمیت در داده‌های چندبعدی این است که در بسیاری موارد، پیچیدگی داده به‌صورت نمایی رشد نکرده و به‌طورعمومی الگوهای اصلی داده در زیرفضاهای با ابعاد کمتر نیز توصیف می‌شوند. با توجه به این حقیقت، در این مقاله توسعه خاصی از تبدیل قیچک ارائه شده‌است؛ به‌گونه‌ای که با استفاده از ماتریس اتساع قطری بتوان توصیف داده در زیرفضاهای موردنظر را به‌دست آورد. تبدیل جدید با نقص اصلی سامانهٔ قیچک کلاسیک در مواجهه با داده‌های با ابعاد بالا مقابله می‌کند. در تبدیل قیچک قطعه‌ای[1] ماتریس اتساع به قطعه‌های کوچک‌تر متناظر با زیرفضاهای با ابعاد کمتر شکسته می‌شود و تبدیل مستقلی را روی هر قطعه ارائه می‌دهد.

ساختار مقاله بدین شکل است که در بخش دو کارهای مرتبط بیان و سپس در بخش سه نظریه قیچک دوبعدی و سه‌بعدی کلاسیک معرفی می‌شود. نظریه تبدیل قیچک قطعه‌ای و روش پیاده‌سازی آن در بخش چهار ارائه‌شده است و در بخش پنج نتایج تجربی و مقایسه تبدیل قیچک قطعه‌ای با سایر روش‌های موجود موردبررسی قرار می‌گیرد. تبدیل قیچک قطعه‌ای با کنترل میزان افزونگی در زمان بسیار کمتر نتایجی قابل‌رقابت با روش قیچک سه‌بعدی کلاسیک ارائه می‌دهد. در انتها نیز نتیجه‌گیری و کارهای آینده بیان می‌شود.

۲- کارهای مرتبط

هدف سامانه‌های بازنمایی تقریب بهینه توابع قطعه‌ای هموار است. در همین راستا برای مدل‌سازی بهتر تغییرات تصویر در سطح بالاتر از نقطهٔ تبدیلاتی ارائه شد که به‌صورت پایه‌ای جدایی‌ناپذیر بوده‌اند، به‌گونه‌ای که توابع پایه این تبدیل‌ها به‌صورت دوبعدی می‌باشد. این خانواده موجک‌های هندسی نامیده می‌شوند. موجک‌های هندسی نخستین‌بار توسط *دونوهو*[2] و گروهش در اوایل قرن بیست و یکم ارائه شد [7, 8, 9]. این مدل نوعی از تعمیم نظریه موجک کلاسیک است که علاوه‌بر پارامترهای مکان و مقیاس، پارامتر دیگری به نام جهت نیز با آن اضافه شده‌است. باتوجه به اینکه موجک‌های هندسی از ابتدا به‌صورت دوبعدی تعریف‌شده‌اند، قادر هستند به‌صورت بهینه اطلاعات هندسه تصویر را استخراج کنند. موجک‌های هندسی با ازبین‌بردن ساختار همسان‌گرد[3] عناصر موجک به بازنمایی بهتری از اطلاعات لبه‌های تصویر (تکینگی خط[4]) که بیشتر دارای کشیدگی مکانی هستند، دست می‌یابند.

خانواده موجک‌های هندسی در حوزه تصویر به دو گروه موجک‌های وفقی[5] و غیر وفقی[6] تقسیم می‌شوند. گروه تبدیلات وفقی در حوزه تبدیلات جداناپذیر [10] با این جهت کلی صورت گرفته است که به‌جای ثابت‌بودن تبدیل به‌ازای تمام تصاویر، از اطلاعات جزئیات هندسه تصویر برای بیان پراکنده آن استفاده شود که ازجمله به تبدیل گُوَک[7]، تبدیل موجک جهتی[8]، نوارک[9] و ... می‌توان اشاره کرد.

در گروه موجک هندسی غیر وفقی [11] از یک تابع پایه مجموعه‌ای از توابع در مقیاس‌ها، جهت‌ها و انتقال‌های مختلف تشکیل می‌شود که لغت‌نامه[10] تبدیل را شکل می‌دهند. در ادامه شرحی مختصر از ایده‌های کلیدی موجود در تبدیل‌های هندسی غیر وفقی ارائه می‌شود.

ساده‌ترین تبدیل در این گروه تیغک[11] [11, 12] است که قابلیت بازنمایی تغییرات در طول خطوط صاف در جهات مختلف را دارد. تبدیل تیغک دوبعدی بر اساس تحلیل موجک در حوزه رادون ساخته می‌شود. تبدیل رادون[12] گسستگی‌هایی در راستای خطوط را به گسستگی‌های نقطه‌ای نگاشت می‌کند؛ بنابراین تبدیل تیغک درواقع استفاده از تبدیل موجک یک‌بعدی روی قطعه‌های تبدیل رادون است. تبدیل تیغک فقط قادر به بازنمایی توابع دوبعدی هموار با گسستگی خطی است.

تبدیل جداناپذیر بعدی، تبدیل پیچک است که در سال ۲۰۰۲ توسط *کندس*[13] و دونوهو [7, 8, 9] و با هدف بازنمایی بهینه منحنی‌های هموار تصویر ارائه شد. ایدهٔ اصلی تبدیل پیچک پنجره‌بندی تصویر ورودی برای تبدیل انحناهای موجود به‌صورت مجموعه‌ای از خطوط در زیربخش‌های تصویر است؛ سپس برای بیان هر خط از تبدیل تیغک استفاده می‌شود. نسخه دیگری از تبدیل پیچک با عنوان پیچک نسل دوم [13] نیز ارائه شده‌است. ثابت می‌شود این تبدیل به‌ازای یک تابع هموار دوبعدی با گسستگی منحنی ازنقطه‌نظر توان

[1] Block Shearlet Transform
[2] Donoho
[3] Isotropic

[4] Line Singularity
[5] Adaptive
[6] Non-adaptive
[7] Wedglet
[8] Directionlet
[9] Bandelet
[10] Dictionary
[11] Ridglet
[12] Radon Transform
[13] Candes

تقریب (تعداد ضرایب بزرگی که انحنا را حس می‌کنند) رفتار نزدیک بهینه دارد.

تبدیل قیچک برای نخستین‌بار در سال ۲۰۰۵ توسط *کوتینیوک*[1] و گروهش [14, 5] معرفی شد. این تبدیل از یک تابع قیچک اصلی که در فضای کارتزین تعریف شده استفاده می‌کند. این تابع پارامترهای مقیاس، برش و انتقال دارد که پارامتر برش آن جهت گسستگی‌ها را بیان می‌کند. از ویژگی‌های مهم این تبدیل به بازنمایی پراکنده بهینه برای داده‌های چندبعدی و رفتار یکسان در ویرایش گسسته و پیوسته آن می‌توان اشاره کرد. به لحاظ نظری نشان داده شده‌است که مشابه پیچک این تبدیل نیز تقریب بهینه‌ای در مواجهه با تصاویر هموار با گسستگی‌های منحنی ارائه می‌دهد. همچنین قابلیت انتخاب جهت‌دار در سامانهٔ بازنمایی قیچک الگوریتم‌های قابل‌قبول برای تشخیص و تحلیل لبه ارائه می‌دهد [15]. نسخه اولیه تبدیل قیچک که برای پردازش تصاویر و در فضای $L^2(R^2)$ ارائه شده بود، توسط *دهلکه*[2] توسعه یافته [16] و نسخه‌های چندبعدی آن برای سیگنال‌های چندبعدی به وجود آمده است. مثالی کاربردی از نسخه چندبعدی پیاده‌سازی سه‌بعدی آن برای رفع نوفهٔ ویدئو است که تقریب پراکنده محلی از دادهٔ سه‌بعدی با تکینگی از درجهٔ دو می‌دهد.

برخلاف ساختارهای متفاوت تبدیلاتی مانند قیچک و پیچک، در تمامی تبدیل‌های ناهمسانگرد که بر اساس مقیاس‌بندی سهمی هستند، پارامتر مقیاس برای میزان مقیاس‌گذاری، ناهمسان‌گرد زاویه برای جهت مشخص‌شده و پارامتر انتقال برای موقعیت مکانی عنصر این نوع تبدیل‌ها تعریف می‌شوند؛ بنابراین یک سامانه از مولکول‌های سهموی به‌صورت یک مجموعه از توابع با استفاده از انبساط سهموی، چرخش و انتقال تعریف می‌شود [17].

هر عنصر در سامانهٔ مولکول سهموی متناظر با یک مقیاس، جهت و موقعیت مکانی خاصی است که اساس محلی‌سازی فرکانس-زمان، ویژگی‌ها و عملکرد این سامانه را تعیین می‌کند. ایده کلی در نسل بعدی یا سامانهٔ آلفا مولکول با مقیاس آلفا[3] گسترش سامانهٔ مولکول سهموی است که در آن $\alpha \in [0,1]$ و مشخص‌کننده درجه ناهمسان‌گردبودن مقیاس است [18]. بدین ترتیب روش مقیاس آلفا علاوه‌بر تبدیل‌های سهموی، تبدیل‌های نظیر تیغک و موجک را نیز شامل می‌شود. هدف کلی، توسعهٔ یک چارچوب کاری برای تمامی تبدیلات هندسی است، بنابراین سامانهٔ آلفا مولکول ماتریس مقیاسی با رابطهٔ زیر دارد:

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{\alpha} \end{pmatrix}, s > 0 \qquad (۱)$$

که در آن پارامتر $\alpha \in [0,1]$ است. برای سامانهٔ موجک $\alpha = 1$، برای سامانه‌های قیچک و پیچک $\alpha = 1/2$ و برای سامانهٔ تیغک $\alpha = 0$ است.

۳- نظریه قیچک کلاسیک

رهیافت قیچک یک روش کلی برای ساخت سامانه‌های تابعی بر اساس توابع متغیر است که این توابع نه‌تنها در مقیاس و موقعیت تغییر می‌کند، بلکه در انتقال‌های قطری کنترل‌شده با ماتریس قیچک نیز تغییرات دارد. در تبدیل قیچک با توجه به اینکه از ماتریس برش‌زنی استفاده شده‌است، مدل شبکه مختصات گسسته حفظ می‌شود و تبدیل قابلیت نگاشت مستقیم از پیوسته به گسسته را دارد. نظریه موجک‌های مرکب روش مؤثری از ترکیب هندسه و تحلیل چندمقیاسی براساس نظریهٔ سامانه‌های هم‌رفت[4] ارائه می‌دهد. تبدیل قیچک حالت خاصی از نظریه موجک‌های مرکب است که در دو بعد با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$A_{AB}(\psi) = \{\psi_{j,l,k}(x) = |\det A|^{\frac{j}{2}} \psi(B^l A^j x - k): j, l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2\} \qquad (۲)$$

$\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ و B و A ماتریس‌های معکوس‌پذیر 2×2 و $|\det B| = 1$ است. A ماتریس اتساع ناهمسان‌گرد و B ماتریس برش و $\psi(.)$ تابع پایه تبدیل قیچک است. همچنین $A_{AB}(\psi)$ یک قاب پارسوال یا قاب چسبان[5] در $L^2(\mathbb{R}^2)$ به فرم زیر تشکیل می‌دهد.

$$\sum_{j,l,k} \left| \langle f, \psi_{j,l,k} \rangle \right|^2 = \|f\|^2 \qquad (۳)$$

در ادامه نظریه قیچک‌های دوبعدی [2, 15] و سه‌بعدی [6] مخروطی به‌طور خلاصه معرفی می‌شوند.

۳-۱- تبدیل قیچک دوبعدی

نمونه خاصی از موجک مرکب در فضای $L^2(\mathbb{R}^2)$ پیچک دوبعدی مخروطی است [15] که در آن $A = A_0, A_1$

[1] Kutyniok
[2] Dahlke
[3] Alpha-Scaling ($\alpha - Scaling$)
[4] Affine Systems
[5] Tight Frame

ماتریس‌های اتساع ناهمسان‌گرد و $B = B_0, B_1$ ماتریس‌های برش است (معادله ۴). اجزای موجک مرکب در سامانهٔ قیچک دوبعدی با روابط مقابل‌تعریف می‌شوند. برای مخروط نخست داریم:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۴)$$

$$\hat{\psi}^{(0)}(\xi) = \hat{\psi}^{(0)}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1)\hat{\psi}_2(\tfrac{\xi_2}{\xi_1}) \qquad (۵)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \hat{\mathbb{R}}^2 \ and\ \xi_1 \neq 0 \qquad (۶)$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \in C^\infty(\hat{\mathbb{R}}) \\ supp\ \hat{\psi}_1 \subset \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{2}\right] \\ supp\ \hat{\psi}_2 \subset [-1,1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{\psi}^{(0)} \in C^\infty, supp\ \hat{\psi}^{(0)} \subset \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]^2 \qquad (۷)$$

$$\psi_{j,l,k}^{(0)}(x) = 2^{\frac{3j}{2}} \psi^{(0)}(B_0^l A_0^j x - k)$$
$$j \geq 0, -2^j \leq l \leq 2^j - 1, k \in \mathbb{Z}^2 \qquad (۸)$$

ناحیه قابل‌تعریف برای مخروط اول:

$$D_0 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \hat{\mathbb{R}}^2 : |\xi_1| \geq \tfrac{1}{8}, \left|\tfrac{\xi_2}{\xi_1}\right| \leq 1\} \qquad (۹)$$

درنتیجه توابع $\{\hat{\psi}^{(0)}(\xi A_0^{-j} B_0^{-l})\}$ یک کاشی[1] از مخروط D_0 را می‌سازد که در شکل (۱) نشان داده شده‌است. همچنین برای مخروط دوم داریم:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۱۰)$$

$$\hat{\psi}^{(1)}(\xi) = \hat{\psi}^{(1)}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1)\hat{\psi}_2(\tfrac{\xi_2}{\xi_1}) \qquad (۱۱)$$

$$\psi_{j,l,k}^{(1)}(x) = 2^{\frac{3j}{2}} \psi^{(1)}(B_1^l A_1^j x - k)$$
$$j \geq 0, -2^j \leq l \leq 2^j - 1, k \in \mathbb{Z}^2 \qquad (۱۲)$$

$$D_1 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \hat{\mathbb{R}}^2 : |\xi_2| \geq \tfrac{1}{8}, \left|\tfrac{\xi_1}{\xi_2}\right| \leq 1\} \qquad (۱۳)$$

با تعریف $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$ سامانهٔ قیچک $SH(\varphi, \psi, \tilde{\psi})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}^2\} \cup \left\{\psi_{j,l,k}^{(d)} : j \geq 0, -2^j + 1 \leq l \leq 2^j - 2, k \in \mathbb{Z}^2, d = 0,1\right\} \cup \left\{\tilde{\psi}_{j,l,k}^{(d)} : j \geq 0, l = -2^j, 2^j - 1, k \in \mathbb{Z}^2, d = 0,1\right\} \quad \xi \in \hat{\mathbb{R}}^2 \ \text{برای} \qquad (۱۴)$$

φ_k مجموعه عناصر متناظر با محدوده فرکانس پایین در حوزه فرکانس و $\psi_{j,l,k}^{(d)}$ مجموعه عناصر متناظر با مخروط‌های محدوده فرکانس بالا در حوزه فرکانس و $\tilde{\psi}_{j,l,k}^{(d)}$ مجموعه عناصر متناظر با عناصر مرزی در حوزه فرکانس است.

صورت گسسته عناصر مخروط‌های محدوده فرکانس بالا یا همان توابع پنجره‌ای جهت‌دار در سامانهٔ قیچک ارائه‌شده با روابط زیر تعریف می‌شود:

برای مخروط افقی

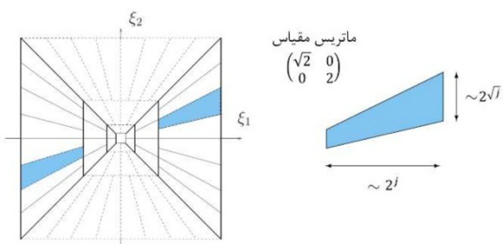
(۱۵)

$$W_{j,l}^{(0)}(\xi) = \begin{cases} \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_2}{\xi_1} - l\right)\chi_{D_0}(\xi) + \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_1}{\xi_2} - l + 1\right)\chi_{D_1}(\xi) & l = -2^j \ \text{اگر} \\ \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_2}{\xi_1} - l\right)\chi_{D_0}(\xi) + \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_1}{\xi_2} - l - 1\right)\chi_{D_1}(\xi) & l = 2^j - 1 \ \text{اگر} \\ \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_2}{\xi_1} - l\right) & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

و برای مخروط عمودی

(۱۶)

$$W_{j,l}^{(1)}(\xi) = \begin{cases} \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_2}{\xi_1} - l + 1\right)\chi_{D_0}(\xi) + \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_1}{\xi_2} - l\right)\chi_{D_1}(\xi) & l = -2^j \ \text{اگر} \\ \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_2}{\xi_1} - l - 1\right)\chi_{D_0}(\xi) + \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_1}{\xi_2} - l\right)\chi_{D_1}(\xi) & l = 2^j - 1 \ \text{اگر} \\ \hat{\psi}_2\left(2^j \frac{\xi_2}{\xi_1} - l\right) & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$



(الف) (ب)

(شکل-۱): (الف)کاشی کاری صفحه فرکانسی $\hat{\mathbb{R}}^2$ که توسط قیچک ایجاد شده‌است. افراز مخروط D_0 با خط‌های ثابت نمایش داده‌شده و افراز مخروط D_1 با خط‌چین نمایش داده شده‌است. (ب) تکیه‌گاه فرکانس یک قیچک $\psi_{j,l,k}$ را که در مقیاس‌بندی سهموی صدق می‌کند، نشان می‌دهد.

(Figure-1): (a) Tiling of frequency plane $\hat{\mathbb{R}}^2$ induced by shearlet. The solid line is D_0 cone and the dashed line is D_1 cone. (b) Frequency support of shear $\psi_{j,l,k}$.

که در آن $j \geq 0$ و $l = -2^j, \dots, 2^j - 1$ and است. D_0, D_1 نواحی مخروطی است که در بخش قبل تعریف

[1] Tiling

شده‌است و $\hat{\psi}_2$ تابع عمل‌گر برش در فضای فرکانسی است. برای $1-2^j \le l \le 2^j-2$ هر ترم از $W_{j,l}^{(d)}(\xi)$ یک تابع پنجره محلی روی یک جفت ذوزنقه همانند شکل ۱-الف است. زمانی که $l=-2^j \; or \; l=2^j-1$ است یعنی در تقاطع مخروط افقی D_0 و مخروط عمودی D_1، $W_{j,l}^{(d)}(\xi)$ ادغام هر دو تابع است.

۲-۳- تبدیل قیچک سه‌بعدی

به‌طور مشابه در تبدیل قیچک سه‌بعدی [6] ماتریس‌های مقیاس و برش به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۱۷)

$$A_{(1)}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}, A_{(2)}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}, A_{(3)}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

(۱۸)

$$B_{(1)}^{[l]}=\begin{pmatrix}1&l_1&l_2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B_{(2)}^{[l]}=\begin{pmatrix}1&0&0\\l_1&1&l_2\\0&0&1\end{pmatrix}, B_{(3)}^{[l]}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\l_1&l_2&1\end{pmatrix}$$

در سه بعد افراز فضای فوریه $\hat{\mathbb{R}}^3$ همانند شکل (۲) با ترکیب نواحی هرمی P_1,P_2,P_3 به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}P_1&=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3: \left|\tfrac{\xi_2}{\xi_1}\right|\le 1, \left|\tfrac{\xi_3}{\xi_1}\right|\le 1\}\\P_2&=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3: \left|\tfrac{\xi_1}{\xi_2}\right|\le 1, \left|\tfrac{\xi_3}{\xi_2}\right|\le 1\}\\P_3&=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3: \left|\tfrac{\xi_1}{\xi_3}\right|\le 1, \left|\tfrac{\xi_2}{\xi_3}\right|\le 1\}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

برای تعریف سامانهٔ قیچک، تابع تک متغیره $\phi\in C^{\infty}$ درنظر می‌گیریم به‌گونه‌ای که برای $0\le\hat{\phi}\le 1$ در بازه $[-\frac{1}{16},\frac{1}{16}]$ مقدار $\hat{\phi}=1$ بوده و در خارج بازه $[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]$ مقدار $\hat{\phi}=0$ خواهد بود. درنتیجه ϕ یک تابع مقیاس از نوع موجک میِر است که تغییر مقیاس یافته و $supp\;\hat{\phi}\subset[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]$ است. تابع $\hat{\phi}(\xi)$ برای $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\hat{\mathbb{R}}^3$ درنظر می‌گیریم.

$$\hat{\phi}(\xi)=\hat{\phi}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\hat{\phi}(\xi_1)\hat{\phi}(\xi_2)\hat{\phi}(\xi_3) \qquad (۲۰)$$

همچنین برای $d=0,1,2$ و $l=(l_1,l_2)$ تابع سه‌بعدی $\psi_{j,l,k}^{(d)}$ متناظر با نواحی هرمی P_d به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{\psi_{j,l,k}^{(d)}: j\ge 0, -2^j\le l_1,l_2\le 2^j, k\in\mathbb{Z}^3\} \qquad (۲۱)$$

$$\hat{\psi}_{j,l,k}^{(d)}(\xi)=\left|\det A_{(d)}\right|^{-\frac{j}{2}} W(2^{-2j}\xi) \; F_{(d)}\left(\xi A_{(d)}^{-j} B_{(d)}^{[-l]}\right) e^{-2\pi\xi A_d^{-j} B_d^{-l} k} \qquad (۲۲)$$

که در آن $W(\xi)=\sqrt{\hat{\phi}^2(2^{-2j}\xi)-\hat{\phi}^2(\xi)}$ و توابع $F_{(d)}$ به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}F_{(1)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)&=V\left(\tfrac{\xi_2}{\xi_1}\right)V\left(\tfrac{\xi_2}{\xi_1}\right)\\F_{(2)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)&=V\left(\tfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)V\left(\tfrac{\xi_3}{\xi_2}\right)\\F_{(3)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)&=V\left(\tfrac{\xi_1}{\xi_3}\right)V\left(\tfrac{\xi_2}{\xi_3}\right)\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

بنابراین سیستم قیچک سه‌بعدی $SH(\varphi,\psi,\tilde{\psi})$ برای $L^2(\mathbb{R}^3)$ به‌صورت مجموعه زیر می‌باشد.

(۲۴)

$$\{\phi_{-k}: k\in\mathbb{Z}^3\}\cup\{\tilde{\psi}_{j,l,k}: j\ge 0, l_1,l_2=\pm 2^j, k\in\mathbb{Z}^3\}\cup \{\psi_{j,l,k}^{(d)}: j\ge 0, |l_1|<2^j, |l_2|\le 2^j, k\in\mathbb{Z}^3, d=1,2,3\}$$

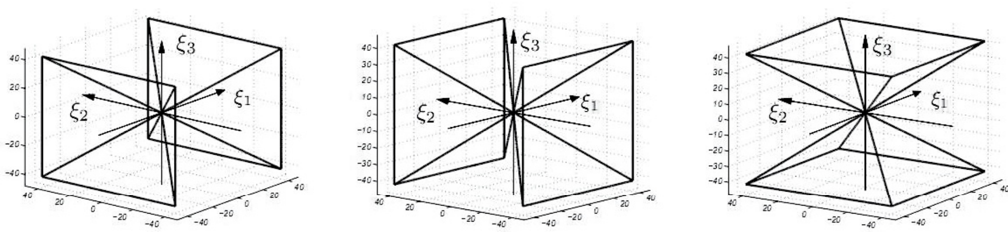
ϕ_k مجموعه عناصر متناظر با محدوده فرکانس پایین در حوزه فرکانس، $\psi_{j,l,k}^{(d)}$ مجموعه عناصر متناظر با مخروط‌های محدوده فرکانس بالا در حوزه فرکانس و $\tilde{\psi}_{j,l,k}^{(d)}$ مجموعه عناصر متناظر با عناصر مرزی در حوزه فرکانس می‌باشند.

صورت گسسته عناصر مخروط‌های محدوده فرکانس بالا یا همان توابع پنجره‌ای جهت‌دار در سیستم قیچک ارائه‌شده با رابطه زیر تعریف می‌شود:

(۲۵)

$$U_{j,l}^{(1)}(\xi)=\begin{cases}V\left(2^j\frac{\xi_2}{\xi_1}-l_1\right)V\left(2^j\frac{\xi_3}{\xi_1}-l_2\right) & \text{اگر } |l_1|,|l_2|<2^j\\ V\left(2^j\frac{\xi_2}{\xi_1}-l_1\right)V\left(2^j\frac{\xi_3}{\xi_1}-l_2\right)\chi_{P_1}(\xi) + V\left(2^j\frac{\xi_1}{\xi_2}-l_1\right)V\left(2^j\frac{\xi_3}{\xi_2}-l_2\right)\chi_{P_2}(\xi) & \text{اگر } |l_2|<2^j \text{ و } l_1=\pm 2^j\\ V\left(2^j\frac{\xi_2}{\xi_1}-l_1\right)V\left(2^j\frac{\xi_3}{\xi_1}-l_2\right)\chi_{P_1}(\xi) + V\left(2^j\frac{\xi_1}{\xi_2}-l_1\right)V\left(2^j\frac{\xi_3}{\xi_2}-l_2\right)\chi_{P_2}(\xi) + V\left(2^j\frac{\xi_1}{\xi_3}-l_1\right)V\left(2^j\frac{\xi_2}{\xi_3}-l_2\right)\chi_{P_3}(\xi) & \text{اگر } l_1,l_2=\pm 2^j\end{cases}$$

در نظر داشته باشید که عناصر $U_{j,l}^{(1)}$ با اندیس $|l_1|,|l_2|<2^j$ به‌طور کامل در ناحیهٔ P_1 هستند. عناصر با اندیس $l_1=\pm 2^j$ یا $l_2=\pm 2^j$ در ناحیهٔ مقابل P_1 و ناحیه هرمی دیگر قرار دارند. برای راحتی کار، این خانواده از توابع را با اندیس ۱ نام‌گذاری می‌کنیم. توابع $U_{j,l}^{(2)}$ و $U_{j,l}^{(3)}$ متناظر با نواحی P_2 و P_3 به روش مشابه تعریف می‌شوند (شکل ۲).



(شکل-۲): نمایشی از نواحی هرمی در فضای فرکانس $\hat{\mathbb{R}}^3$. نواحی از چپ به راست به‌ترتیب P_1، P_2 و P_3 می‌باشند. باز چاپ‌شده از [6]

(Figure-2): From left to right, the figure illustrates the pyramidal regions P_1, P_2, P_3 in the frequency space $\hat{\mathbb{R}}^3$.Reprinted from [6]

۴- تبدیل قیچک قطعه‌ای

همان‌طورکه در بخش قبل نیز مطرح شد تبدیل‌های هندسی تحلیلی کامل شامل جهت، مقیاس و انتقال را به‌ازای تمامی ابعاد داده ارائه می‌دهند که این خود منجر به رشد نمایافزونگی داده با افزایش ابعاد آن و لذا افزایش پیچیدگی زمانی و حافظه‌ای تبدیل می‌شود. از طرف دیگر در کاربردهای مهندسی به‌دلیل نیاز به خاصیت پایایی انتقال[1] ترجیح به استفاده از تبدیل‌های چندمقیاسی بدون مرحله زیرنمونه‌گیری[2] است؛ بنابراین درعمل پیچیدگی حافظه‌ای و افزونگی دادهٔ این‌گونه تبدیل‌ها از یک طرف با تعداد ابعاد و از طرف دیگر با تعداد مراحل تجزیه افزایش نمایی دارد که به‌تفصیل در قسمت بعد موردبحث قرار خواهد گرفت. درنتیجه استفاده کاربردی از این نوع تبدیل‌ها با توجه به زمان اجرا و نیاز گسترده به حافظه برای داده‌های با ابعاد بالا بسیار محدود خواهد ماند.

به‌طورکلی می‌توان بیان داشت که در بیش‌تر داده‌ها، نظام‌مندی‌های موجود بین بعدها بر اساس کلیه بعدها نبوده و به‌راحتی ساختارهای موجود در داده را در زیرفضاهایی با ابعاد کمتر از داده اصلی نیز می‌توان بیان کرد؛ بنابراین از دو منظر، تحلیل چنین داده‌هایی را می‌توان بررسی کرد.

از یک‌طرف تحلیلی می‌توان ارائه کرد که متناظر با ابعاد داده بوده و تمامی روابط بین بعدی را در نظر بگیرد که این خود منجر به افزایش پیچیدگی‌های تحلیل می‌شود. برخلاف این‌که بررسی‌ها عملکرد خوب این روش را بیان می‌کنند، اما با توجه به افزونگی و پیچیدگی سامانه درعمل کارایی نخواهد داشت.

از طرف دیگر می‌توان به‌طور کل از روابط بین بعدی صرف‌نظر کرده و تجزیه مستقلی برای ابعاد داده ارائه کرد. تبدیل موجک کلاسیک جدایی‌پذیر نمونه‌ای از این مدل تحلیل است که نتایج موجود از این تبدیل نشان می‌دهد با وجود سرعت و ساده‌بودن تبدیل نسبت به مدل قبلی، الگوریتم کارایی لازم را نداشته و نتایج، قابل‌قبول نمی‌باشند؛ بنابراین این‌گونه می‌توان بیان کرد که بین میزان ارتباط ابعاد به معنی میزان پیچیدگی داده و عملکرد قابل‌قبول الگوریتم موازنه‌ای برقرار است که مدل‌های اشاره‌شده در دو طرف این موازنه قرارگرفته‌اند.

به‌عنوان نقطهٔ تعادل یا موازنه بهتر بین پیچیدگی تبدیل و عملکرد آن، روابط بین بعدی را به‌جای اینکه برای تمامی ابعاد در نظر بگیریم، برای زیرمجموعه‌هایی با ابعادی کمتر از ابعاد داده اصلی بیان و از بعضی از روابط بین بعدی صرف‌نظر می‌کنیم. در همین راستا تبدیل قیچک قطعه‌ای که در این مقاله ارائه می‌شود، روشی است که در آن زیرفضاهای با ابعاد کمتر از ابعاد اصلی داده در نظر گرفته‌شده و در هر زیرفضا تبدیل به‌صورت مستقل پیاده‌سازی می‌شود. رهیافت جدید پیشنهادی در موازنه به‌گونه‌ای عمل می‌کند که با وجود کاهش میزان پیچیدگی، عملکردی نزدیک به روش‌های تحلیل کامل ارائه می‌دهد. می‌توان عنوان کرد که با درنظرگرفتن اندازه قطعه به‌صورت محدودشده، پیچیدگی محاسباتی تبدیل نسبت خطی با افزایش ابعاد داده خواهد داشت.

به‌طورخاص به‌عنوان کاربردی برای تبدیل قیچک قطعه‌ای رفع نوفه تصاویر ویدئویی را در نظر گرفته‌ایم تا بتوان عملکرد این تبدیل را با سایر روش‌های متداول در این حوزه مقایسه کرد. تصاویر ویدئویی که توالی فریم‌ها در زمان است به‌عنوان یک داده سه‌بعدی در نظر گرفته می‌شود و برای سادگی در پیاده‌سازی این داده به‌صورت مکعب فرض می‌شود، به‌گونه‌ای که تعداد پیکسل‌ها در طول و عرض تصویر برابر با تعداد فریم‌ها در طول زمان است.

با توجه به اینکه ابعاد اصلی داده ویدئو سه است، تنها ترکیب زیرقطعه‌ها به‌صورت (2,1) است؛ بدین معنی که ماتریس اتساع قطعه‌ای-قطری را را به‌صورت یک قطعه 2×2

---
[1] Shift Invariance
[2] Subsampling

در کنار یک قطعه 1×1 درنظر می‌گیریم. این تجزیه درحقیقت تحلیل جزئی سریعی را اجرا می‌کند که ممکن است تمامی ساختارهای داده ورودی را استخراج نکند. درنتیجه برای جبران کمبود تحلیل بین بعد جداشده و دوبعد دیگر، این تحلیل ساده‌شده را سه بار منتاظر با سه گروه‌بندی مختلف از داده‌های ورودی تکرار می‌کنیم.

$$A_{xy}=\begin{array}{c c} & \begin{matrix}x & y & t\end{matrix}\\ \begin{matrix}x\\y\\t\end{matrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}a_r & 0\\ 0 & \sqrt{a_r}\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & [b]\end{bmatrix}\end{array}$$
$$A_{yt}=\begin{array}{c c} & \begin{matrix}x & y & t\end{matrix}\\ \begin{matrix}x\\y\\t\end{matrix} & \begin{bmatrix}[b] & \begin{matrix}0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{bmatrix}a_r & 0\\ 0 & \sqrt{a_r}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{array}, \qquad (۲۶)$$
$$A_{xt}=\begin{array}{c c} & \begin{matrix}x & t & y\end{matrix}\\ \begin{matrix}x\\t\\y\end{matrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}a_r & 0\\ 0 & \sqrt{a_r}\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & [b]\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A_{xy}=\begin{array}{c c} & \begin{matrix}x & y & t\end{matrix}\\ \begin{matrix}x\\y\\t\end{matrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & s_r\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & [1]\end{bmatrix}\end{array}$$
$$A_{yt}=\begin{array}{c c} & \begin{matrix}x & y & t\end{matrix}\\ \begin{matrix}x\\y\\t\end{matrix} & \begin{bmatrix}[1] & \begin{matrix}0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & s_r\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{array} \qquad (۲۷)$$
$$A_{xt}=\begin{array}{c c} & \begin{matrix}x & t & y\end{matrix}\\ \begin{matrix}x\\t\\y\end{matrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & s_r\\ 0 & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & [1]\end{bmatrix}\end{array}$$

که در آن $a_r\in\mathbb{R}^*$ و $s_r\in\mathbb{R}$ و $r\in\{xy,xt,yt\}$ است. در شکل (۳) نمونه ورودی (داده سه‌بعدی) و نمونه‌های از برش‌های دوبعدی از داده سه‌بعدی ورودی متناظر با تجزیه‌های مختلف از ماتریس اتساع درهر تحلیل نشان داده شده است.

نتایج تجربی نشان می‌دهد که تبدیل قیچک قطعه‌ای بازنمایی پراکنده را برای ویدئوهای ساده می‌تواند ایجاد کند. در ادامه با استفاده از تبدیل قیچک قطعه‌ای پیشنهادی، یک روش رفع نوفه بر اساس آستانه‌گذاری سخت ارائه می‌کنیم. در اینجا آستانه‌گذاری سخت به‌عنوان ساده‌ترین مدل آستانه‌گذاری برای نشان‌دادن قدرت تبدیل استفاده شده‌است.

در روش ارائه‌شده، هدف بازیابی تصویر ویدئویی f از سیگنال نوفه‌ای ورودی y است، که در آن نوفه به‌صورت نوفه گاوسی جمع‌شده فرض شده‌است. مراحل الگوریتم به شرح زیر است:

(شکل-۳): نمونه‌های از برش‌های دوبعدی از ورودی سه‌بعدی منتاظر با تجزیه‌های مختلف از ماتریس اتساع در هر آنالیز

(Figure-3): Examples of 2D cuts from the 3D input cube corresponding to decompositions of the dilation matrix in each analysis.

- ضرایب تجزیه قیچک قطعه‌ای به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\sum_{\mu_r} c_{\mu_r}(y)\psi_{\mu_r}\,,\sum_{\mu_r'} c_{\mu_r'}(y)\gamma_{\mu_r'} \qquad (۲۸)$$

که در آن $c_{\mu_r}(y)=\langle y,\psi_{\mu_r}\rangle$ ضرایب ماتریس قیچک 2×2 را تشکیل می‌دهد و μ_r نشان‌دهندهٔ انتقال، برش و مقیاس است. همچنین $c_{\mu_r'}(y)=\langle y,\gamma_{\mu_r'}\rangle$ ضرایب ماتریس موجک 1×1 را نشان می‌دهد و μ_r' نشان‌دهندهٔ انتقال مقیاس است. و r مشخص‌کنندهٔ اندیس قطعه قیچک است. ($r\in\{xy,xt,yt\}$) .

- ضرایب پس از محاسبه در فضای قیچک جدید در هر مقیاس/جهت $\cdot_r$ با استفاده از روش آستانه‌گذاری $T_{\cdot r}$ تغییر می‌یابد.

$$c^*_{\cdot r}(y)=\begin{cases}c_{\cdot r}(y) & \text{اگر}\ \left|c_{\cdot r}(y)\right|>T_{\cdot r}\\ 0 & \text{درغیراینصورت}\end{cases},\quad \cdot\in\{\mu_r,\mu_r'\} \qquad (۲۹)$$

مقدار $T_{\cdot r}$ آستانه معروف 3σ است که بر اساس سطح نویز محاسبه می‌شود [1]. این مقدار آستانه از رابطه $T_{\cdot r}=\frac{\sigma^2}{\sigma_{\cdot r}}$ محاسبه می‌شود که در آن $\sigma_{\cdot r}$ انحراف معیار استاندارد ضرایب قیچک از نوفه در $\cdot_r$ امین سطح مقیاس-جهت بوده و σ^2 مقدار واریانس استاندارد نوفه است.

- در انتها تقریب $\tilde f$ از سیگنال ورودی f به‌دست می‌آید.

$$\tilde f=\sum_{r\in\{xy,xt,yt\}}\omega_r\sum_\mu c^*_{\cdot r}(y)\Psi_{\cdot r} \qquad (۳۰)$$

که در آن ω_r ضریب وزن‌دهی است که تعیین‌کنندهٔ اهمیت هر قطعه در بازسازی هر پیکسل است و بر اساس پراکندگی ضرایب در قطعه متناظر به‌دست می‌آید:

$$\omega_r = \frac{\sum_{r} c^*_r(y)}{\left|c^*_r(y)\right|_0} \tag{۳۱}$$

ضریب $\left|c^*_r(y)\right|_0$ برابر تعداد عناصر غیر صفر از $c^*_r(y)$ برای هر r است.

از آن‌جایی‌که در هرسه تحلیل برای تجزیه‌های مختلف از ماتریس اتساع، اندازه قطعه‌ها یکسان هستند، بنابراین بانک‌های فیلتر متناظر نیز یکسان خواهند بود. درنتیجه با پیش محاسبه و ذخیره یک بانک فیلتر، برای تمام قطعه‌های قیچک از آن استفاده می‌توان کرد و سرعت الگوریتم را بهبود بیشتری بخشید.

۵- نتایج تجربی

تبدیل قیچک از لحاظ نظری قابلیت گسترش برای پردازش سیگنال‌های چندبعدی را دارد، بدین‌صورت که برای هر داده‌ای با n بعد تبدیل مستقیم قیچک که تمامی ویژگی‌های و خاصیت‌های تبدیل قیچک دوبعدی را دارد، ساخته می‌شود. ولی درعمل با توجه به پیچیدگی‌های ساختاری تبدیل استفاده از آن امکان‌پذیر نیست. از طرف دیگر عنوان شد که تبدیل قیچک قطعه‌ای راه‌حلی جایگزین برای موازنه بهتر میان عملکرد و هزینه اجرای سامانه است. برای بررسی دقیق‌تر این موازنه‌ها ارزیابی عملکرد دو روش را باهم به جزئیات بررسی می‌کنیم.

معیارهای اصلی در نظر گرفته‌شده در ارزیابی به دو گروه اصلی تقسیم می‌شود. نخستین دسته معیارهای پیچیدگی محاسباتی و حافظه‌ای سامانه در زمان اجرا و دسته دوم معیارهای بهبود تصویر بر اساس PSNR[1] و SSIM[2] می‌باشد. معیار PSNR بر اساس مقیاس لگاریتمی دسی‌بل بازگو و براساس رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$PSNR = 20 * \log_{10}\left(\frac{MAX_f}{MSE}\right) \tag{۳۲}$$

که در آن MAX_f بیشترین مقدار سیگنال داده و MSE میانگین مربعی خطا است. معیار SSIM نیز خرابی تصویر را با توجه به ساختار اطلاعاتی[3] در نظر می‌گیرد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SSIM(x,y) = \frac{(2\mu_x\mu_y+c_1)(2\sigma_{xy}+c_2)}{(\mu_x^2+\mu_y^2+c_1)(\sigma_x^2+\sigma_y^2+c_2)} \tag{۳۳}$$

که در آن μ_x میانگین تصویر x، μ_y میانگین تصویر y، σ_x^2 واریانس تصویر x، σ_y^2 واریانس تصویر y و σ_{xy} کوواریانس تصاویر x و y و همچنین c_1 و c_2 ثابت‌های معادله جهت جلوگیری از تقسیم بر صفر است.

داده ویدئوی سه‌بعدی را با اندازهٔ $192 \times 192 \times 192$) در نظر بگیرید. برای مقایسه بهتر هر دو روش، کلیه تنظیمات اعم از تعداد سطوح تجزیه، تعداد برش‌ها در هر سطح یکسان در نظر گرفته می‌شود. برای این ویدئو تجزیهٔ سه‌سطحی در نظرگرفته شده‌است که تعداد جهت‌های پایه در باندهای میانی به‌ترتیب $n = 4,4,8$ است؛ بنابراین برای تبدیل قیچک کلاسیک سه‌بعدی با توجه به اینکه تعداد جهت‌ها به‌صورت ترکیبی ساخته می‌شود، تعداد آن‌ها به‌ترتیب $n = 16,16,64$ است. همچنین تعداد ضرایب تولیدشده در پردازش بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$2 \times (64 \times N^3 + 16 \times N^3 + 16 \times N^3) + N^3 = 193 \times N^3 \tag{۳۴}$$

که در رابطه بالا N^3 اندازهٔ ویدئو است.

همان‌طور که درقبل نیز بیان شد با توجه به اینکه در این تبدیل تجزیه سطوح بدون مرحله زیرنمونه‌گیری انجام می‌گیرد، درنتیجه تعداد ضرایب با توجه به سطح مقیاس ثابت است. در تبدیل قیچک قطعه‌ای برای قطعه 2×2 قیچک تعداد جهت‌ها را یکسان در نظر گرفته و به‌ترتیب $n = 4,4,8$ است و برای قطعه 1×1 موجک یک سطح تجزیه را درنظر می‌گیریم؛ بنابراین تعداد ضرایب بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$(3+1) \times (8 \times N^3 + 4 \times N^3 + 4 \times N^3) + 3 \times N^3 = 67 \times N^3 \tag{۳۵}$$

که در رابطهٔ بالا N^3 اندازهٔ ویدئو است.

همان‌طـور که ملاحظه می‌کنیـد، از نظر حافظه‌ای و محاسبهٔ ضرایب تبدیل قیچک قطعه‌ای، کاهش قابل‌توجهی درحدود 64% نسبت به تجزیه قیچک کلاسیک دارد. لازم به ذکر است، تعداد جهت‌ها در باندهای میانی و تعداد سطوح تجزیه با اندازه ویدئوی ورودی و اندازه تکیه‌گاه قیچک رابطه مستقیم دارد و هرچه اندازه ویدئو بزرگ‌تر باشد، درنتیجه تعداد جهت‌های باند میانی و تعداد سطوح نیز بیشتر می‌شود؛

[1] Pick Signal-to-Noise Ratio
[2] Structural SIMilarity
[3] Structural Information

پس بنابراین، این نسبت کاهش میان تعداد ضرایب تبدیل قیچک کلاسیک و تبدیل قیچک قطعه‌ای بیشتر می‌شود.

برای مثال اگر اندازهٔ ویدئو دوبرابر شده و برابر با $(384 \times 384 \times 384)$ انتخاب شود، برای اینکه قادر باشیم اطلاعات ساختاری فایل ورودی را تاحد قابل قبولی استخراج کنیم، بایستی دست‌کم پنج سطح تجزیه با تعداد قیچک $n =$ 4,4,8,8,16 را درنظر بگیریم. درنتیجه تعداد ضرایب تولیدشده در قیچک سه‌بعدی کلاسیک برابر $833 \times N^3$ و برای تبدیل قیچک قطعه‌ای $163 \times N^3$ است. بنابراین برای این اندازه ویدئو در حدود 80% نرخ کاهش ضرایب داریم، که این خود گواهی بر ادعای قابلیت کنترل افزایش افزونگی است.

برای مقایسه با سایر روش‌های موجود، از سه نمونه تصاویر ویدئویی به نام‌های mobile، coastguard و tempete با نوفه‌های گاوسی $\sigma = 30,40,50$ استفاده شده و همچنین تعداد برش‌های در سطح‌های مختلف از کمترین جزئیات به بیشترین به‌ترتیب $n = 4,4,8$ انتخاب شده‌است. جدول (۱) مقادیر PSNR به‌دست‌آمده از روش قیچک قطعه‌ای ارائه شده (BST[1]) و سایر روش‌های موجود، تبدیل قیچک دوبعدی و سه‌بعدی (2DSHEAR، 3DSHEAR)، تبدیل موجک گسسته (3D DWT) و تبدیل سطحک (SURF) را نشان می‌دهد. داده‌های جدول (۱) نشان می‌دهد که روش قیچک قطعه‌ای به‌طورکامل با سایر روش‌ها رقابت می‌کند و به‌طورخاص روش جدید در تمامی حالت‌های آزمایش از روش 2DSHEAR عملکرد بهتری دارد و همچنین از نظر مقدار PSNR نزدیک به روش 3DSHEAR است درحالی‌که از آن روش بسیار سریع‌تر است.

(جدول-۱): عملکرد الگوریتم‌های رفع نوفه در سه ویدئوی متفاوت. * بازچاپ‌شده از [6].

(Table-1): Performance of denoising algorithm on 3 different videos. * reprinted from [6]

PSNR (dB)	Mobile			Coastguard			Tempete		
Noise σ	30	40	50	30	40	50	30	40	50
SURF *	28.39	27.18	26.27	26.82	25.87	25.15	24.2	23.26	22.61
3DSHEAR	29.49	27.93	26.74	27.99	26.72	25.77	25.87	24.51	23.52
2DSHEAR	25.43	23.97	22.92	24.62	23.33	22.42	22.36	21.19	20.43
3D DWT	24.93	23.94	23.03	24.34	23.44	22.57	22.09	21.5	20.92
BST	26.64	25.07	23.95	27.03	25.80	24.88	24.82	23.51	22.60

[1] Block Shearlet Transform

برای مقایسه بیشتر عملکرد دو تبدیل قیچک قطعه‌ای و قیچک کلاسیک برای دادهٔ ویدئوی با اندازهٔ $(192 \times 192 \times 192)$ عملکرد حافظه‌ای و زمانی دو روش را بررسی می‌کنیم. همان‌طور که در معادله‌های (۳۴) و (۳۵) بیان شد، با مشخصات ذکرشده برای قیچک پایه برای قیچک کلاسیک افزونگی داده برابر $193 \times N^3$ بوده و برای قیچک قطعه‌ای برابر $67 \times N^3$ است؛ بنابراین با توجه به اینکه نرم‌افزار متلب برای نوع داده دابل[2] تعداد هشت بایت را در نظر می‌گیرد، درنتیجه برای ویدئوی مورد اشاره تبدیل قیچک کلاسیک در زمان اجرا نیازمند حدود 11GB حافظه رم است؛ درحالی‌که در اجرای تبدیل قیچک قطعه‌ای حدود 4GB حافظه رم مورد نیاز است.

نکته حائز اهمیت این است که برای ویدئو با اندازه $(192 \times 192 \times 192)$ که ازنظر اندازه تصویر و تعداد فریم در برابر ویدئوهای امروزی ناچیز است، در زمان اجرای الگوریتم تبدیل قیچک کلاسیک با توجه به حجم بالای حافظهٔ موردنیاز در بیش‌تر مواقع سامانه با مشکل حافظهٔ مجازی و کندشدن مواجه شده و درعمل اجرای الگوریتم را غیرممکن می‌کند. راه جایگزین برای این مشکل اجرای مرحله‌ای تبدیل است؛ بدین معنی که کل سطح‌های تجزیه و برش‌ها هم‌زمان اجرانشده و به‌صورت مرحله و سری اجرا شوند تا حافظه رم مورد نیاز در زمان اجرا کاهش‌یابد که این خود منجر به افزایش چندبرابری زمان اجرا می‌شود. جدول (۲) زمان‌های اجرای روش‌های اشاره‌شده بر روی داده سه‌بعدی مورد بحث را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است تبدیل سطحک (ردیف نخست جدول ۲) جزء گروه تبدیل‌های وقفی بوده و زمان اشاره‌شده مربوط به مرحله رفع نوفه است و در خصوص زمان مورد نیاز برای انتخاب لغت‌نامه اشاره نشده است.

(جدول-۲): مقایسه زمان‌های اجرا از تبدیل‌های سه‌بعدی مختلف. * باز چاپ‌شده از [6].

(Table-2): Comparison of running times for different 3D transforms. * reprinted from [6]

Algorithm	Running time (data size: 192^3)
SURF *	34 sec
3DSHEAR	263 sec
3DSHEAR Serial Computing	825 sec
2DSHEAR	154 sec
3D DWT	7.5 sec
BST	168 sec

[2] Double

همان‌طورکه در بند قبل برای زمان اجرای ذکرشده برای تبدیل قیچک کلاسیک اشاره شد، درواقع این زمان اجرای واقعی الگوریتم نیست؛ بلکه الگوریتم برای داده با اندازه کوچک‌تر 64 × 64 × 64 اجرا شده است و سپس بر اساس نسبت حجم داده‌ها، زمان اجرا برای ویدئوی اصلی محاسبه شده‌است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در ردیف سه جدول (۲) زمان اجرای تبدیل قیچک به‌صورت مرحله‌ای جهت جلوگیری از مشکل حافظه رم آورده شده است که با زمان اجرای مدل اصلی اختلاف چندبرابری دارد.

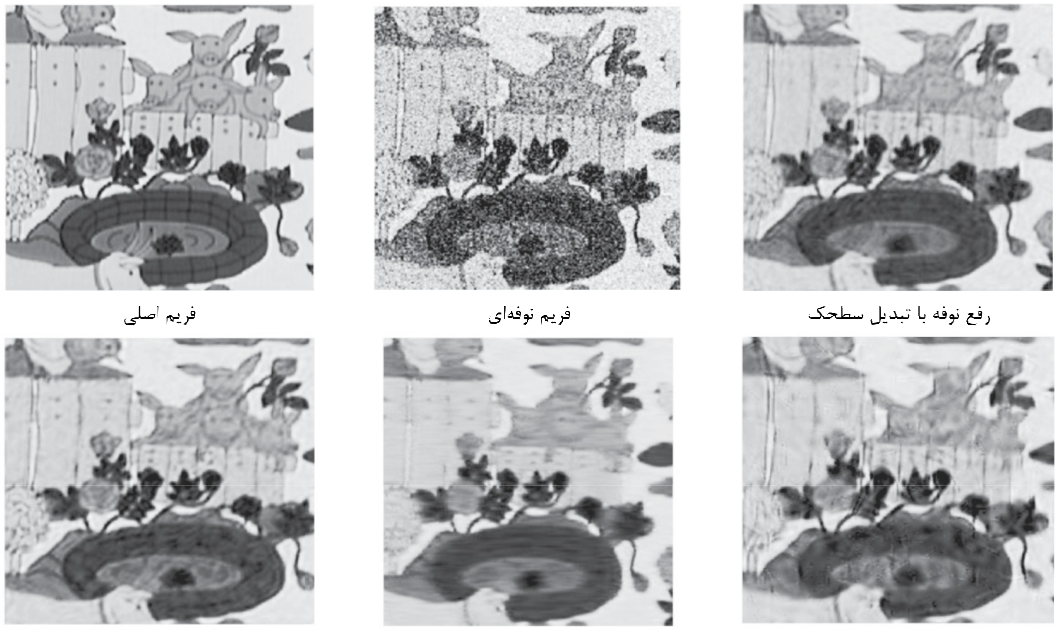
در جدول (۳) مقایسه کاملی براساس معیارهای PSNR و SSIM بین تبدیل قیچک سه‌بعدی کلاسیک 3DSHEAR، تبدیل قیچک دوبعدی که روی تک‌تک فریم‌های انجام شده است؛ 2DSHEAR و تبدیل قیچک قطعه‌ای BST برای ویدئوهای coastguard، miss america، mobile sequence، salesman، tempete و tennis در سطوح نوفه‌ای گاوسی مختلف 10, 20, 30, 40, 50 جهت درک بهتر میزان عملکرد الگوریتم آورده شده است.

(جدول-۳): عملکرد الگوریتم‌های 3DSHEAR، 2DSHEAR و BST بر روی ویدئوهای متفاوت بر اساس معیارهای PSNR و SSIM

(Table-3) Comparing performance of different video denoising method based on PSNR and SSIM.

Video Sequence	*Coastguard*					*Miss America*					*Mobile Sequence*				
Noise std ( )	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50
PSNR Result															
3DSHEAR	**33.36**	**29.84**	**27.99**	**26.72**	**25.77**	**36.32**	**33.55**	**31.85**	**30.57**	**29.51**	**35.49**	**31.70**	**29.49**	**27.93**	**26.74**
2DSHEAR	30.43	26.61	24.62	23.33	22.42	34.11	30.93	29.05	27.75	26.77	31.91	27.68	25.43	23.97	22.92
BST	32.24	28.84	27.03	25.80	24.88	35.20	31.94	30.07	28.86	27.97	33.33	29.07	26.64	25.07	23.95
SSIM Result															
3DSHEAR	**0.933**	**0.868**	**0.814**	**0.767**	**0.726**	**0.936**	**0.899**	**0.863**	**0.829**	**0.795**	**0.958**	**0.912**	**0.865**	**0.819**	**0.776**
2DSHEAR	0.874	0.752	0.658	0.558	0.534	0.904	0.846	0.797	0.757	0.723	0.911	0.814	0.734	0.670	0.618
BST	0.913	0.838	0.779	0.729	0.686	0.920	0.861	0.810	0.768	0.730	0.932	0.853	0.775	0.706	0.647

Video Sequence	*Salesman*					*Tempete*					*Tennis*				
Noise std ( )	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50
PSNR Result															
3DSHEAR	**36.36**	**33.29**	**31.37**	**29.94**	**28.82**	**32.05**	**27.98**	**25.87**	**24.51**	**23.52**	**33.40**	**30.15**	**28.56**	**27.51**	**26.73**
2DSHEAR	32.20	28.57	26.63	25.41	24.59	29.04	24.44	22.36	21.19	20.43	30.67	28.69	27.57	26.61	25.79
BST	35.53	31.74	29.58	28.18	27.21	31.22	26.95	24.82	23.51	22.60	32.31	29.43	27.85	26.78	25.94
SSIM Result															
3DSHEAR	**0.942**	**0.899**	**0.857**	**0.815**	**0.773**	**0.950**	**0.891**	**0.834**	**0.781**	**0.733**	**0.844**	**0.712**	**0.639**	**0.591**	**0.555**
2DSHEAR	0.877	0.776	0.696	0.635	0.588	0.903	0.766	0.649	0.560	0.496	0.686	0.599	0.570	0.549	0.529
BST	0.930	0.864	0.799	0.742	0.694	0.942	0.864	0.791	0.726	0.671	0.803	0.667	0.594	0.563	0.541

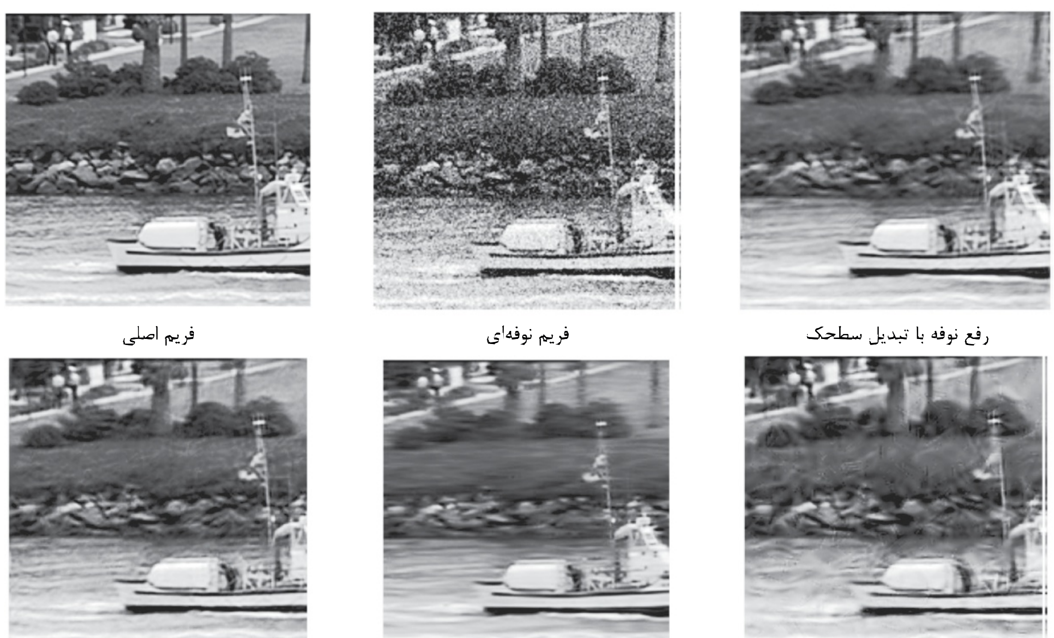


رفع نوفه با تبدیل سطحک — فریم نوفه‌ای — فریم اصلی

رفع نوفه با تبدیل 2DSHEAR — رفع نوفه با تبدیل قیچک قطعه‌ای — رفع نوفه با تبدیل 3DSHEAR

(شکل-۴): مقایسه عملکرد الگوریتم‌های رفع نوفه مختلف برای ویدئوی Mobile. از بالا سمت چپ: فریم اصلی، فریم نوفه‌ای (با نوفه 30 = σ) ، رفع نوفه با تبدیل‌های سطحک، 3DSHEAR، قیچک قطعه‌ای و 2DSHEAR.

(Figure-4): A comparison of performance of denoising algorithms on Mobile video. From top left: Original frame, noised frame (with σ = 30), a frame denoised by Surflet, a frame denoised by 2DSHEAR, a frame denoised by BST and A frame denoised by 3DSHEAR.



رفع نوفه با تبدیل سطحک — فریم نوفه‌ای — فریم اصلی

رفع نوفه با تبدیل 2DSHEAR — رفع نوفه با تبدیل قیچک قطعه‌ای — رفع نوفه با تبدیل 3DSHEAR

(شکل-۵): مقایسه عملکرد الگوریتم‌های رفع نویز مختلف برای ویدئوی Coast Guard. از بالا سمت چپ: فریم اصلی، فریم نوفه‌ای(با نوفه σ = 30) ، رفع نوفه با تبدیل‌های سطحک، 3DSHEAR، قیچک قطعه‌ای و 2DSHEAR.

(Figure-5): A comparison of performance of denoising algorithms on Coast Guard video. From top left: Original frame, noised frame (with σ = 30), a frame denoised by Surflet, a frame denoised by 2DSHEAR, a frame denoised by BST and A frame denoised by 3DSHEAR.

لازم به ذکر است، کلیه اعداد جدول (۳) از اجرای مستقیم الگوریتم‌ها به‌دست آمده است. همان‌طورکه در این جدول نیز مشاهده می‌کنید، تبدیل قیچک قطعه‌ای به‌طور میانگین $2dB$ الی $3dB$ از تبدیل قیچک دوبعدی در مقیاس PSNR بالاتر قرار دارد. از طرف دیگر اختلاف این روش در بیش‌تر موارد کمتر از $1dB$ در مقایسه با تبدیل قیچک کلاسیک سه‌بعدی است. نتایج گواه این ادعا است که تبدیل قیچک قطعه‌ای از لحاظ عمکلرد، بسیار نزدیک به تبدیل قیچک کلاسیک سه‌بعدی عمل می‌کند؛ درحالی‌که از لحاظ میزان حافظه مورد نیاز و زمان اجرا در موقعیت بهتری قرار دارد.

در شکل‌های (۴ و ۵) یک فریم نمونه از تصاویر ویدئویی mobile و coastguard انتخاب شده‌است و عملکرد بصری روش‌های قیچک قطعه‌ای و قیچک دوبعدی و سه‌بعدی در مسئله رفع نوفه مقایسه شده است. همان‌طورکه در این دو شکل مشاهده می‌کنید، در تصاویر حاصل از تبدیل قیچک دوبعدی اثرات مصنوعی[1] حاصل از رفع نوفه قابل مشاهده است، که در تبدیل قیچک قطعه‌ای مشابه با تبدیل قیچک کلاسیک سه‌بعدی این اثرات به‌طورتقریبی رفع شده است. همچنین کیفیت بصری رفع نوفه در تبدیل قیچک قطعه‌ای به‌وضوح بسیار بهتر از تبدیل قیچک دوبعدی و همتراز با تبدیل قیچک کلاسیک و تبدیل سطحک است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رهیافتی نوین برای موازنه بهتر میان پیچیدگی داده ناشی از رابطه بین بعدی و عملکرد قابل‌قبول الگوریتم ارائه شد. تبدیل قیچک قطعه‌ای با درنظرگرفتن زیرفضاهایی با ابعاد کمتر از ابعاد اصلی داده، مشکل رشد نمایی افزونگی داده و به تبع آن مشکل پیچیدگی حافظه‌ای زمانی تبدیل قیچک کلاسیک را حل کرده و قادر به کنترل افزونگی داده به‌صورت خطی است. مزیت اصلی تبدیل قیچک قطعه‌ای افزونگی کمتر در مقایسه با تبدیل قیچک کلاسیک است که منجر به پیچیدگی محاسباتی، حافظه‌ای و زمان اجرای کمتر می‌شود.

به‌بیان‌دیگر عامل تعداد برش در تبدیل قیچک کلاسیک برای دادهٔ سه‌بعدی همان‌طور که در رابطه (۳۴) نیز بیان شد، نمایی از دو (s^2) است و به‌همین ترتیب برای داده چهاربعدی نمای از سه (s^3) و ... است. درحالی‌که این عامل برش در تبدیل قیچک قطعه‌ای برای داده سه‌بعدی متناظر با رابطه (۳۵) به‌صورت خطی (s) کاهش یافته و برای داده با ابعاد بالاتر نیز با فرض درنظرگرفتن زیرفضاهای با ابعاد محدودشده به‌صورت خطی است. به‌طور خلاصه، تبدیل قیچک قطعه‌ای از لحاظ عملکردی همان‌طورکه نتایج جدول‌های (۱ و ۳) نشان می‌دهد، با اختلاف ناچیزی، پایین‌تر از تبدیل قیچک سه‌بعدی کلاسیک قرار دارد. درحالی‌که از لحاظ افزونگی و زمان اجرا براساس نتایج جدول (۲) مشابه با تبدیل قیچک دوبعدی عمل می‌کند.

همان‌طورکه در قسمت الگوریتم پیاده‌سازی‌شده اشاره شد، در این مقاله بر اساس آستانه‌گذاری سخت عمل شده که ساده‌ترین روش آستانه‌گذاری و اعمال تغییرات روی ضرایب تبدیل است. با توجه به افزونه‌بودن این نوع تبدیل‌ها، برای به‌دست آوردن نتایج بهتر از روش‌های پیچیده مانند انتخاب و تغییر ضرایب بر اساس مدل‌سازی و یا آستانه‌گذاری‌های ترکیبی می‌توان استفاده کرد.

[1] Artifact

۷- مراجع — 7- References

[1] N. Kingsbury, "Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising and Compression," *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING,* vol. 9, no. 9, pp. 1532-1546, 2000.

[2] G. Gao, "Image denoising by non-subsampled shearlet domain multivariate model and its method noise thresholding," *Optik,* vol. 124, no. 22, pp. 5756-5760, 2013.

[3] S. Hauser and G. Steidl, "Convex Multiclass Segmentation with Shearlet Regularization," *International Journal of Computer Mathematics,* vol. 90, no. 1, pp. 62-81, 2013.

[4] S. Liu, S. Hu and Y. Xiao, "Image separation using wavelet-complex shearlet dictionary," *Journal of Systems Engineering and Electronics,* vol. 25, no. 2, pp. 314-321, 2014.

[5] G. Easley, D. Labate and W. Q. Lim, "Sparse Directional Image Representations using the Discrete Shearlet Transform," *Applied and Computational Harmonic Analysis,* vol. 25, no. 1, pp. 25-46, 2008.

[6] P. S. Negi and D. Labate, "3-D Discrete Shearlet Transform and Video Processing," *IEEE Transaction on Image Processing,* vol. 21, no. 6, pp. 2944-2954, 2012.

[7] D. L. Donoho and M. R. Duncan, "Digital Curvelet Transform: Strategy, Implementation and Experiments," *Proc. SPIE 4056, Wavelet Applications VII,* pp. 12-29, 2000.

[8] E. J. Candes and D. L. Donoho, "New tight frames of curvelets and optimal representation of objects with piecewise C^2 singularities," *Comm. Pure and Appl. Math.,* vol. 56, pp. 216-266, 2004.

[9] E. J. Candes, L. Demanet, D. L. Donoho and L. Ying, "Fast Discrete Curvelet Transforms," *SIAM Multiscale Model,* vol. 5, no. 3, pp. 861-899, 2006.

[10] A. Lisowska, Geometrical Multiresolution Adaptive Transforms: Theory and Applications, Springer International Publishing, 2014.

[11] J. L. Strack, F. Murtagh and J. M. Fadili , Sparse Image and Signal Processing, Cambridge University Press, 2010.

[12] M. N. Do and M. Vetterli, "The finite ridgelet transform for image representation," *IEEE Transactions on Image Processing,* vol. 12, no. 1, pp. 16-28, 2003.

[13] J. Ma and G. Plonka, "A review of curvelets and recent applications," *IEEE Signal Processing Magazine,* 2009.

[14] D. Labate, W. Q. Lim, G. Kutyniok and G. Weiss, "Sparse multidimensional representation using shearlets," *Wavelets XI, Proceedings of the SPIE,* pp. 254-262, 2005.

[15] S. Yi, D. Labate, G. R. Easley and H. Krim, "A Shearlet Approach to Edge Analysis and Detection," *IEEE Transaction on Image Processing,* vol. 18, no. 5, pp. 929 - 941, 2009.

[16] S. Dahlke and G. Teschke, "The continuous shearlet transform in higher dimensions: variations of a theme," *Group Theory: Classes, Representation and Connections, and Appli-cations,* vol. 1, pp. 167-175, 2010.

[17] P. Grohs and G. Kutyniok, "Parabolic molecules," *Foundations of Computational Mathematics,* vol. 14, no. 2, pp. 229-337, 2013.

[18] P. Grohs, S. Keiper, G. Kutyniok and M. Schafer, "α-Molecules," in *Seminar for Applied Mathemetics*, 2014.

حجـت باقــرزاده حسیــن‌آبـاد مدرک کارشناسی ارشد خود را در سال ۱۳۹۵ در رشته کامپیوتر-هوش مصنوعی از دانشگاه فردوسی مشهد دریافـت کـرده اسـت. موضوع پایان‌نامه ایشان، حذف نوفه تصویر و ویدئو توسط تبدیل قیچک قطعه‌ای بوده است.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

hojjat.bagherzadehhosseinabad@stu.um.ac.ir

احـد هراتــی استادیار دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگـاه فردوسـی مشهد اسـت. نامبـرده تحصیــلات خــود را در مـدرک کارشناسی ارشد در سال ۲۰۰۳ از دانشگاه تهران دریافت کرده و مدرک دکترای خود را از دانشگاه ETHZ سوئیس در سال ۲۰۰۸ اخذ کرده است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان عبارتند از: بینایی سه‌بعدی ربات، مدل‌ها و تخمین‌های احتمالاتی.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

a.harati@um.ac.ir

زهــرا امیــری مدرک دکترای خود را از دانشگاه فردوسی مشهد در سال ۱۳۹۶ اخذ کرده است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان عبارتند از: قاب‌ها، تحلیل هارمونیک، قیچک و کاربرد آن‌هـا در پردازش تصویـر.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

za_am10@stu.um.ac.ir

رجبعلــی کامیابی‌گل استاد دانشکــده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد است. نامبرده مدرک کارشناسی ارشد خود را در سال ۱۳۶۷ از دانشگـاه فردوسـی مشهـد دریافت کرده و مـدرک دکترای خـود را از دانشگـاه آلبرتـــای کانـــادا در سال ۱۳۷۵ اخـذ کرده است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشـان عبارتنــد از: تحلیـــل هارمونیک کاربردی در زمینه‌های موجک و قیچک و کاربرد آن‌ها.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

kamyabi@um.ac.ir