بررسی دقیق رفتار مدل‌های آشوبی با استفاده از روش نمودار دوشاخگی کیفی

قاسم صادقی بجستانی[1*]، عباس منزوی[2] و سیّد محمّدرضا هاشمی گلپایگانی[3]

[1] گروه مهندسی پزشکی، مرکز تحقیقات علوم اعصاب محاسباتی، دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع)، مشهد، ایران

[2] گروه مهندسی پزشکی، دانشکدهٔ فنی مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

[3] دانشکدهٔ مهندسی پزشکی، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده

روشِ اساسی برای شناسایی رفتار نگاشت‌های بازگشتی، ترسیم نمودار بایفورکیشن (دوشاخگی) است. در روش مرسوم با تغییر مقدار پارامترِ نگاشت، سری‌های زمانی متعددی ایجاد می‌شود و آن‌گاه با ترسیم مقادیر این سری‌ها در دوره ماندگار- بر حسب مقادیر پارامتر- نمودار دوشاخگی به‌دست می‌آید. این نمودارها، در تعیین دوره تناوب و همچنین جداسازی رفتارهای با دورهٔ تناوب طولانی، از رفتارهای آشوب‌گونه، دقت کافی ندارند؛ و از طرف دیگر به‌دلیل دوبعدی‌بودن نمودارها، امکان بررسی اثر شرط نخستین در شکل‌گیری بستر جذب وجود ندارد. نمودار ارائه‌شده در این پژوهش که آن را نمودار دوشاخگی کیفی (QBD)[1] می‌نامیم، امکان تعیین دقیق دوره تناوب را فراهم می‌کند. با استفاده از QBD شناسایی مقادیری از شرط نخستین و پارامتر که به‌ازای آنها رفتار نگاشت، متناوب، شبه‌متناوب و یا آشوب‌گونه است، ممکن خواهد بود. نتایج به‌دست‌آمده از پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی بر روی نگاشت لاجستیک، بیان‌گر توانایی آن در تشخیص تناوب‌های بالا و پنجره‌های متناوب است. همچنین مشاهده شد، نمودار دوشاخگی لاجستیک از یک نظم موزاییکی (نظمی که از چینش اجزا در کنارهم و نه براساس تعامل شکل بگیرد) بهره‌مند نیست و نظمی پویا دارد. مزیت‌های QBD بر روش معمول ترسیم نمودار دوشاخگی عبارتند از: تشخیص تناوب‌های بالا، تشخیص پنجره‌های متناوب، کاهش زمان محاسبات و نمایش دورهٔ تناوب به‌جای مقادیر کمی دامنه. در ادامهٔ این پژوهش به‌صورت تحلیلی نمای لیاپانوف -به‌عنوان یکی از ابزاهای متداول در شناسایی آشوب- مورد بررسی قرارگرفته و دربارهٔ صحت آن نکات قابل تأملی بیان شده است. در پایان به‌منظور ارزیابی روش پیشنهادی، تحلیل کمی‌سازی بازگشت و QBD مورد مقایسه قرارگرفته‌اند.

واژگان کلیدی: نمودار دوشاخگی، آشوب، نگاشت لاجستیک، نمای لیاپانوف، نمایش بازرخداد.

Accurate Survey of Chaotic Modeling with Qualitative Bifurcation Diagram

Ghasem Sadeghi Bajestani[1*], Abbas Monzavi[2] & Seyyed Mohammad Reza Hashemi Golpayegani[3]

[1] Computational Neuroscience Research Center, Imam Reza International University, Mashhad, Iran

[2] Biomedical Engineering Department, Shahed University, Tehran, Iran

[3] Biomedical Engineering Department, AmirKabir University of Technology, Tehran, Iran

[1] Qualitative Bifurcation Diagram

* نویسندهٔ عهده‌دار مکاتبات

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

Abstract

The most important method for behavior recognition of recurrent maps is to plot bifurcation diagram. In conventional method used for plotting bifurcation diagram, a couple of time series for different values of model parameter have been generated and these points have been plotted with due respect to it after transient state. It does not have enough accuracy necessary for period detection and essential for discrimination between long periodic behaviors from chaotic behaviors; on the other hand because of being 2-dimensinal, it will not be possible to investigate the effect if the initial condition is in the basin of attraction.

In this research, a new bifurcation diagram is presented which is called: Qualitative Bifurcation Diagram (QBD). QBD provides accurate determination of periodicity. Results of our algorithm implementation on logistic map, represents its ability on determining long periods and period windows. Bifurcation diagram of logistic map does not obey mosaic tiling patterns (patterns that are created by arrangement not interaction) as a disciplinein addition to having the dynamic order. Some benefits of QBD are: long period discrimination, period window detection, computation time reduction, period presentation instead of amplitude show. In the following we have an analytical survey to Lyapunov exponent – as a usual measurement tool for chaotic behavior – and important notes are expressed. Finally, Recurrent Quantification Analysis (RQA) and QBD are compared.

Keywords: **Bifurcation diagram, Chaos, Logistic Map, Lyapunov Exponent, Recurrent Quantification Analysis**

۱- مقدّمه

با توجه به تنوع رفتار نگاشت‌های بازگشتی استفاده از آنها به‌منظور مدل‌سازی سامانه‌های زیستی، رو به گسترش است. [1]-[8] یکی از شاخص‌های مهم در انتخاب مدل مناسب برای سامانه، پایداری است. علاوه‌براین اطمینان دربارهٔ کیفیت رفتار مدل -در محدودهٔ معینی از مقدار پارامترها اهمیت ویژه‌ای دارد.

در مراجع متعدد به‌منظور مطالعهٔ تحلیلی رفتار نگاشت، ابتدا نقاط ثابت[1] معادله آن را محاسبه و سپس با بررسی رفتار نگاشت در اطراف این نقاط، وضعیت نگاشت را در حالت ماندگار تعیین می‌کنند [9].

نگاشت لاجستیک، نخستین‌بار در سال ۱۹۷۶ معرفی شد. نگاشت لاجستیک به‌دلیل تنوع رفتار، یکی از نگاشتهای پرکاربرد در مدل‌سازی رفتار سامانه‌ها زیستی است. [10]،[11] این نگاشت که با معادلهٔ(۱) توصیف می‌شود، یک معادله تک‌متغیره از مرتبهٔ نخست است و تنها یک پارامتر کنترل دارد (A) . برای پایداری نگاشت لاجستیک، باید مقدار پارامتر کنترل، بین صفر تا چهار باشد. مقادیر سری زمانی تولیدشده (X) بین صفر و یک هستند [12].

$$X_{k+1} = f(X_k) = A\,X_k\,(1-X_k)$$
$$A \in [0,4], X \in [0,1] \qquad (۱)$$

برای شناخت کیفیت رفتار این نگاشت، به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر، به‌طورمعمول از شیوهٔ بررسی نقاط ثابت استفاده می‌شود. بدین منظور ابتدا با مساوی قراردادن مقدار X_k با X_{k+1} نقاط ثابت نگاشت، محاسبه می‌شود. (معادله۲) که این عمل به‌معنای صفرشدن تغییرات در حالت ماندگار است.

$$X_{k+1} = X_k^* \rightarrow X_k^* = A X_k^* \left(1 - X_k^*\right)$$
$$\rightarrow X_1^* = 0,\ X_2^* = 1 - \frac{1}{A} \qquad (۲)$$

در ادامه جهت انجام تحلیل پایداری نقاط ثابت، از معادلهٔ نگاشت، مشتق گرفته و بر اساس قدر مطلق شیب در نقاط ثابت، پایداری نقاط تعیین می‌شود. چنان‌چه قدر مطلق شیب برای نقطه‌ای در نزدیکی نقطه ثابت، بیشتر از یک باشد، نقطهٔ مورد نظر از نقطه ثابت دور می‌شود؛ بنابراین نقطهٔ ثابت را ناپایدار[2] یا نقطه ثابت دافع[3] می‌نامند. در مقابل، اگر قدرمطلق شیب کمتر از یک باشد، نقطهٔ ثابت را پایدار[4] یا یا نقطه ثابت جاذب[5] می‌نامند.

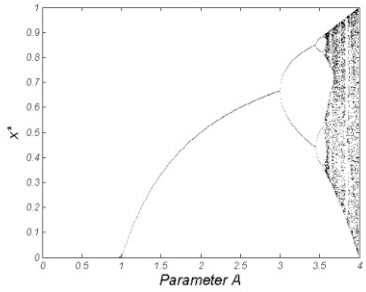
با این تحلیل وقتی مقدار A از یک کوچکتر است ($A \le 1$) نقطه صفر، نقطه‌ای جاذب است. در این وضعیت با شروع از هر شرط نخستینی، سرانجام مقدار $X = 0$

[1] Fixed Points
[2] Unstable Fixed Point
[3] Repelling Fixed Point
[4] Stable Fixed Point
[5] Attracting Fixed Point

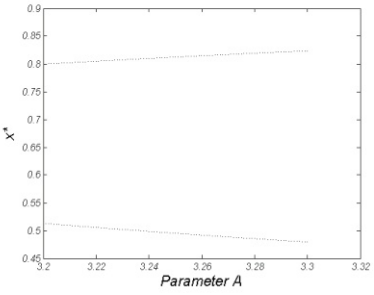
[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

خواهد شد. وقتی A بین یک و سه است ($1 < A < 3$) نقطهٔ صفر، نقطه‌ای دافع و نقطه 1-1/A نقطه‌ای جاذب است. بنابراین با انتخاب هرمقدار نخستینی برای X، مقدار نهایی متغیر، برابر 1-1/A خواهد شد. در ادامه وقتی A بیشتر از سه می‌شود ($A > 3$) هر دو نقطهٔ ثابت، ناپایدار می‌شوند، اما نگاشت پایدار می‌ماند. برای تحلیل این پایداری، از حل عددی نگاشت لاجستیک (معادله ۱) استفاده می‌شود. بدین منظور نمودار دوشاخگی[1] (نمودار دوشاخه‌شدگی) ترسیم می‌شود.[13] در این نمودار مقادیر سری زمانی در حالت ماندگار، به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر ترسیم می‌شود. (شکل۱-الف) . [2]،[14] با مراجعه به نمودار دوشاخگی، وقتی پارامتر $A > 3$ است، سری زمانی در حالت ماندگار دارای دو مقدار خواهد بود (دوره تناوب[2] دو)؛



الف



ب

(شکل- ۱): نمودار دوشاخگی لاجستیک (با الگوریتم‌های معمول) با مقدار اولیه ۰/۴۲
الف. $4>A>0$ ب. $3.3>A>3.2$

(Figure- 1): Bifurcation Diagram of Logistic Map (with General algorithm) initial condition which is 0.42 a. $0<A<4$ b. $3.2<A<3.3$

لذا در حالت ماندگار، دو نقطهٔ پایدار جدید خواهیم داشت که به‌صورت متوالی اتفاق می‌افتند، دراین‌صورت برای تکرار هرکدام، باید یک بار از نقطهٔ دیگر عبور کرد. بنابراین نقاط پایدار جدید از نگاشت دوم قابل محاسبه هستند (معادله ۳).

$$X_1^* = f\left(X_2^*\right), X_2^* = f\left(X_1^*\right) \rightarrow X_1^* = fof\left(X_1^*\right) \qquad (۳)$$

با افزایش پارامتر A نقاط ثابت جدید نیز ناپایدار می‌شوند. در این شرایط باید به سراغ نگاشت‌های مرتبهٔ بالاتر رفت؛ لذا منطقی است که نگاشت مرتبهٔ سوم امتحان شود؛ اما به این دلیل که نمودار دوشاخگی وجود چهار نقطهٔ پایدار را الزامی می‌داند، به جای مطالعهٔ نگاشت سوم در این مرحله، نقاط ثابت نگاشت چهارم و در مراحل بعدی نگاشت هشتم و... بررسی می‌شوند. بنابراین مسیر بررسی تحلیلی بر اساس نمودار دوشاخگی تعیین می‌شود. لذا تحلیل ریاضی ابزاری برای فهم نمودار دو شاخگی (حل عددی) است. از این رو می‌توان ادعا کرد درک ما از رفتار نگاشت‌ها بر اساس حل عددی و نمودار دوشاخگی شکل می‌گیرد.

نمودارهای دوشاخگی مرسوم تنها مقادیر عددی بستر جذب را نمایش می‌دهد؛ لذا فهم دقیق رفتار این نگاشت و تشخیص رفتار متناوب از آشوب‌گونه در دوره‌های تناوب بالا از روی این نمودار ممکن نیست و ممکن است به‌اشتباه، آشوب شناسایی شود. به‌عنوان مثال تشخیص دوره تناوب 176 (درمقدار پارامتر کنترل $A = 3.602$) از آشوب با استفاده از نمودار دوشاخگی مرسوم به‌سختی ممکن خواهد بود.

در این پژوهش برای نخستین‌بار به‌جای نمایش مقادیر بستر جذب، مقادیرِ دورهٔ تناوب به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر A محاسبه و به‌عنوان نمودار دوشاخگی کیفی[3] (QBD) ارائه شده است. با استفاده از این نوع نمودار، دوشاخگی زوایای جدیدی از رفتار نگاشت لاجستیک قابل کنکاش است، به عنوان مثال می‌توان به وابستگی بعضی از رفتارهای متناوب آن به شرایط اولیه، اشاره کرد. همچنین به این روش، امکان بحث درخصوص علت بروز آشوب در دینامیک این سامانه فراهم شده است.

حساسیت به شرط نخستین یکی از معیارهای شناسایی رفتار آشوب‌گونه است. کمی‌سازی این معیار با استفاده از نمای لیاپانوف انجام می‌شود. با فرض نمایی‌بودن، نمای لیاپانوف مثبت، بیان‌گر واگرایی دو تراژکتوری متمایز با شرایط نخستین نزدیک به هم است. نمای لیاپانوف برای نگاشت لاجستیک، به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر A با استفاده از فرمول (۴) محاسبه می‌شود [13]،[15].

[1] Bifurcation Diagram
[2] period
[3] Qualitative Bifurcation Diagram (QBD)

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]
[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

$$\lambda = \frac{1}{n}\left(ln\left|f'(x_0)\right| + \ldots + ln\left|f'(x_{n-1})\right|\right) \qquad (۴)$$

که در آن $f'(x)$ مشتق معادله نگاشت لاجستیک و ln لگاریتم طبیعی است [15]. در این فرمول با فرض اینکه دو تراژکتوری از نقاط نخستین نزدیک به هم شروع شده‌اند، نسبتِ افزایش فاصله در تکرارهای بعدی با مشتق جایگزین شده است، بنابراین $f'(x_{n-1})$ به‌معنای قراردادن x_{n-1} در فرمول مشتق است، وقتی که شرط نخستین x_0 باشد.

در منابع مختلف با ترسیم هم‌زمان نمودار دوشاخگی و نمای لیاپانوف به مطالعه رفتار نگاشت می‌پردازند [16] و نمای لیاپانوف مثبت را معرف رفتار آشوب‌گونه و نمای لیاپانوف منفی را توصیف‌گر رفتارمتناوب می‌دانند [17]،[18].

در ادامه در بخش دوم روش کار و شبه‌کد الگوریتم QBD معرفی شده است؛ در بخش سوم الگوریتم QBD به منظور ترسیم نمودار دوشاخگی کیفی به‌کار گرفته شده و مزایای آن بررسی شده است. در بخش سوم نیز نمای لیاپانوف و ابزار نمایش باز رخداد[1] به‌عنوان ابزارهای تحلیل سیگنال‌های آشوب‌گونه مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲- روش کار

روش QBD مبتنی بر کیفیت دادگان - نه فقط کمیت- است، در این روش دوره تکرار به‌ازای مقادیر مختلف محاسبه و ترسیم می‌شود. برای ترسیم QBD ازشبه کد[2] زیر استفاده می‌کنیم.

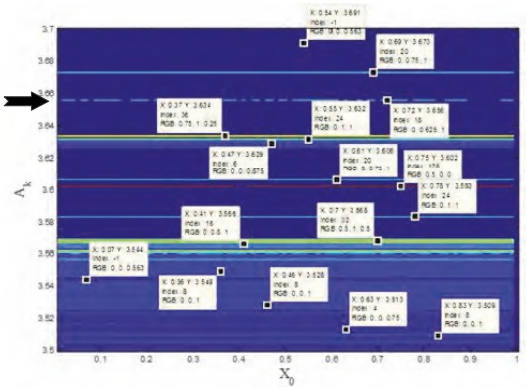
ایدهٔ اصلی در محاسبه دوره تناوب این است که، در یک نگاشت بازگشتی وقتی به نخستین تکرار برخوردیم بقیه مقادیر نیز به‌صورت تکراری تولید شده و تشکیل یک رفتار متناوب می‌دهد. پس دورهٔ تناوب نزدیک‌ترین فاصله تکرار یک مقدار در سری زمانی نگاشت بازگشتی است. در این روش پس از تولید سری زمانی و قرارگرفتن در بستر جذب (عبور از دوره گذرا)، آخرین نمونهٔ تولیدشده را با نمونه‌های قبلی مقایسه کرده و درصورت تساوی، اختلاف شمارهٔ تکرار[3] به‌عنوان دورهٔ تناوب در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که رفتارهای تکراری در دورهٔ گذرا پدیدار نمی‌شوند، با بروز رفتارهای تکراری می‌توان از رسیدن به بستر جذب اطمینان داشت. چنانچه پس از تعداد محدودی تکرار، مقادیر یکسانی مشاهده نشود، آشوب تشخیص داده و به‌جای دورهٔ تناوب مقدار -1 را به آن اختصاص می‌دهیم. در این روش امکان

[1] Recurrent Quantification Analysis
[2] Pseudo code

بررسی اثر شرط نخستین بر دینامیک سامانه در ابعاد بالاتر وجود دارد. شکل(۲) در این شکل می‌توان به‌سادگی اثر شرط اولیه بر پویایی سامانه در شرایط آشوب‌ناک را مورد بررسی قرار داد. به‌عنوان مثال نگاشت لاجستیک در نواحی اطراف A=3.658، رفتار آشوب‌گونه دارد؛ اما در این مقدار شاهد یک رفتار تناوبی با دورهٔ تناوب 18، هستیم که با تغییر در شرط اولیه (محور افقی) دچار گسستگی‌های متعددی شده است. این اتفاق بیان‌گر اثر شرط اولیه بر پویایی سامانه در پارامتر A=3.656 است. (شکل۲ - پیکان زرد رنگ)

Qualitative Bifurcation Diagram

Define Vector X_1 and A (L= Length (A), LL=Length(X_1))
Define Flage ,$a_{i,j}$=-1 for all i and j (Flag $_{L*LL}$)
Define Iteration Number (iter)
Define Maximum period (Maxperiod)
For i ←1 to L do
  For ii←1 to LL do
    $X(1)\leftarrow X_1(ii)$
    For k←1 to iter do
      $X_{k+1}\leftarrow A_i*X_k*(1-X_k)$
    Endfor
    If X_{k+1} is infinit
      Flage(i,ii)← -1
      Break For$_k$
    Endif
    If Flage(i,ii) is -1
      For m←1 to Maxperiod
        If X_{end-m} Precisely is X_{end}
          Flage(i,ii)←m
          Break For$_m$
        Endif
      Endfor
    Endif
  Endfor
Endfor



(شکل-۲): نمایش QBD لاجستیک در دو بعد. محور افقی مربوط به تغییرات شرط اولیه و محور عمودی مربوط به تغییرات پارامتر A است.

(Figure- 2): QBD representation of Logistic Map in 2-dimension. Horizontal axis represents the initial condition (X_0) and vertical axis represents the control parameter (A)

[3] Iteration

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]
[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

۳- پیاده‌سازی الگوریتم

نمودار دوشاخگی کیفی، ویژگی‌های خاصی دارد که برخی از آنها عبارتند از: ۱- شناسایی مقادیری از شرط اولیه و پارامتر که نگاشت به‌ازای آن مقادیر پایدار است. ۲-تشخیص صحیح دوره‌های تناوب. ۳-شناسایی دوره‌های تناوب طولانی، شبه‌متناوب، آشوب و ... ۴-مشاهده پنجره‌های متناوب جدید. ۵-امکان بررسی دقیق نمای لیاپانوف ۶-هزینهٔ محاسباتی بسیار پایین‌تر از روش‌های مرسوم. ۷-امکان نمایش نمودار دوشاخگی در دو و یا سه بعد که در ادامه به بررسی تفصیلی پنج ویژگی نخست خواهیم پرداخت. لازم به ذکر است، در ترسیم شکل‌ها و محاسبات، دو ویژگی دیگر نیز مورد توجه قرار گرفته است.

۳-۱- مقادیری از شرط اولیه و پارامتر که نگاشت به‌ازای آن مقادیر پایدار است

نخستین ویژگی روش QBD آن است که مقادیری را از شرط اولیه و پارامتر که به‌ازای آن مقادیر پایدار هستند می‌توان بدست آورد. به‌عنوان مثال یکی از نگاشت‌های شبه‌لاجستیک به‌صورت معادله (۵) است را در نظر می‌گیریم. این نگاشت دارای نقطه پایدار حقیقی نیست اما با استفاده از *QBD* به‌سادگی آن را می‌توان تحلیل نموده و رفتارهای مختلف آن را دنبال کرد.

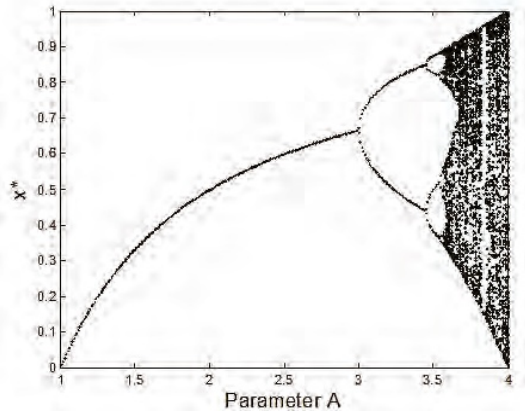
$$x_{k+1}=x_k^{\,2}+Ax_k-1$$
$$x_{k+1}=f(x_k)\rightarrow f'(x_k)=2x_k+A$$
$$x_k^{\,*}=\frac{-(A-1)\pm\sqrt{(A-1)^2+4}}{2}\rightarrow \qquad (۵)$$
$$f'(x_k^{\,*})=1\pm\sqrt{(A-1)^2+4}\rightarrow\left|f'(x_k^{\,*})\right|>1$$

شکل (۴) نشان می‌دهد رفتار این نگاشت بیشتر اوقات متناوب با دورهٔ تناوب دو، و آشوب است. رفتار این نگاشت دارای نکات قابل تأملی است، نخستین نکته تغییر رفتار این نگاشت از آشوب به متناوب و برعکس به‌ازای تغییر در شرط اولیه است. (اثر شرط اولیه بر رفتار پویا) دومین نکته مهم –همان‌طور که در شکل(۴) نمایش داده شده است- وجود سه نقطهٔ بحران[1] در بستر جذب[2] است. در نقاط بحران با تغییر بسیار ناچیز شرط نخستین رفتار نگاشت از آشوب به متناوب با دوره تناوب دو، تغییر می‌کند.

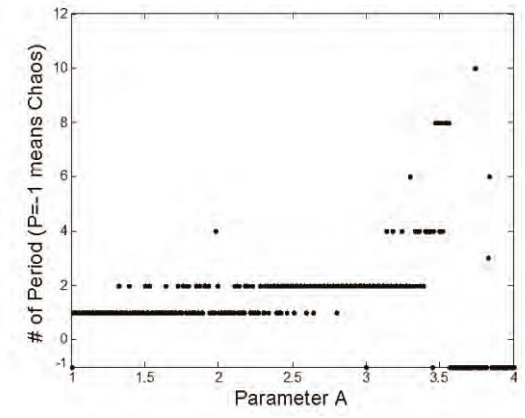
[1] Crisis

۳-۲- تشخیص صحیح دوره‌های تناوب

دومین ویژگی روش QBD تشخیص صحیح دوره‌های تناوب است. در شکل (۳) نمودار دوشاخگی مرسوم برای نگاشت لاجستیک، در کنار نمودار دوشاخگی کیفی (نمایش دوره تناوب بر اساس مقادیر پارامتر) رسم شده است. نخستین نکتهٔ عجیب این است که به‌ازای مقادیر مشخصی از پارامتر کنترل، نمودار دوشاخگی کیفی کاهش و افزایش‌های متوالی دوره تناوب را نشان می‌دهد درحالی‌که در نمودار دوشاخگی کمی (مرسوم)، دوره تناوب ثابت است. به‌عنوان مثال در محدوده $A<3$، انتظار می‌رود به‌ازای تمامی مقادیر A شاهد رفتار متناوب با دوره تناوب برابر یک باشیم؛ درحالی‌که در نمودار کیفی تناوب‌های ۴،۲،۱ دیده می‌شود. علت نیز آن است که چون مقادیر سری زمانی بسیار نزدیک به هم هستند این تغییر در دوره تناوب با استفاده از نمودار دوشاخگی کمی قابل تشخیص نیست.



الف



ب

(شکل-۳): نمایش نمودار دوشاخگی

الف. مرسوم ب.QBD

(Figure-3): Bifurcation Diagram
a. Conventional b. QBD

[2] Basin Of Attraction

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

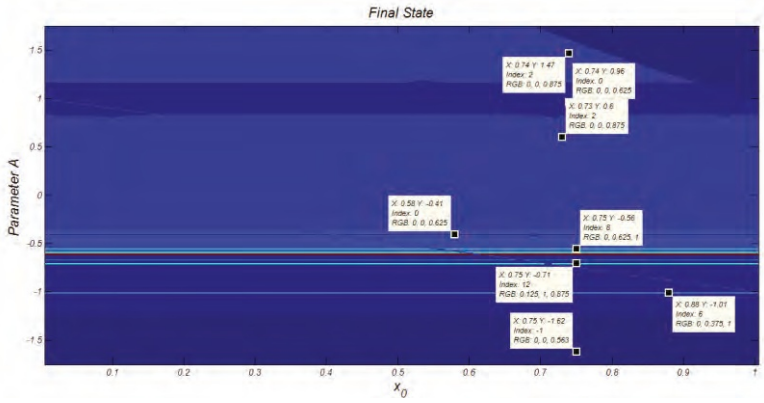
به‌عنوان مثالی دیگر به‌ازای مقدار A=3.252 دوره تناوب سری زمانی ۴ برابر است اگرچه در نمودار کمی این دوره تناوب دو، می‌باشد(شکل ۱-ب). برای بررسی بیشتر موضوع چهار بردار تعریف می‌کنیم:

$$Y_k = X_{k+1} - X_k \quad (۶)$$

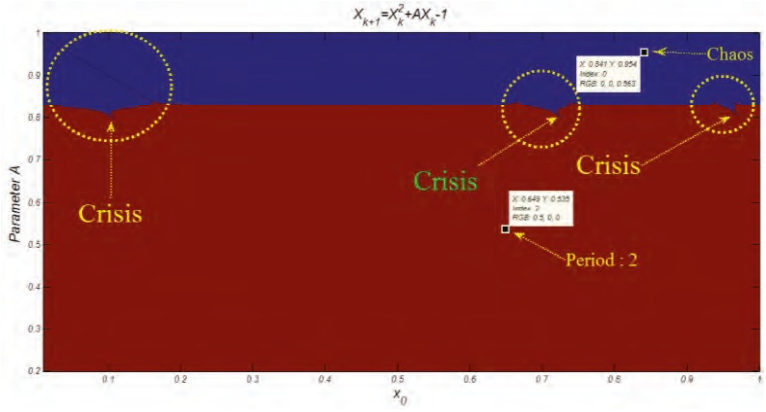
$$W_k = X_{k+1} - X_{k-1} \quad (۷)$$

$$Z_k = X_{k+1} - X_{k-2} \quad (۸)$$

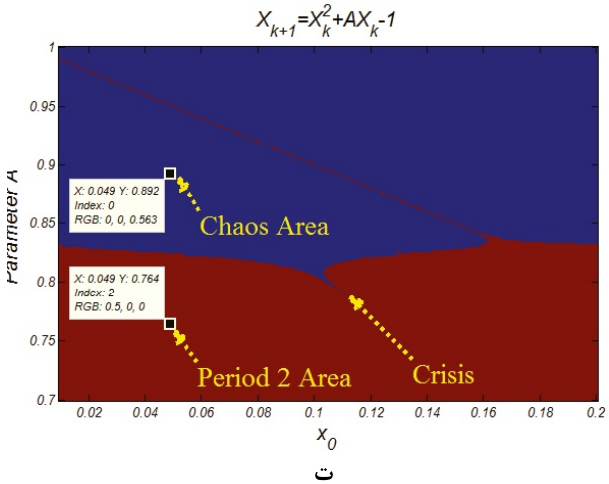
$$V_k = X_{k+1} - X_{k-3} \quad (۹)$$



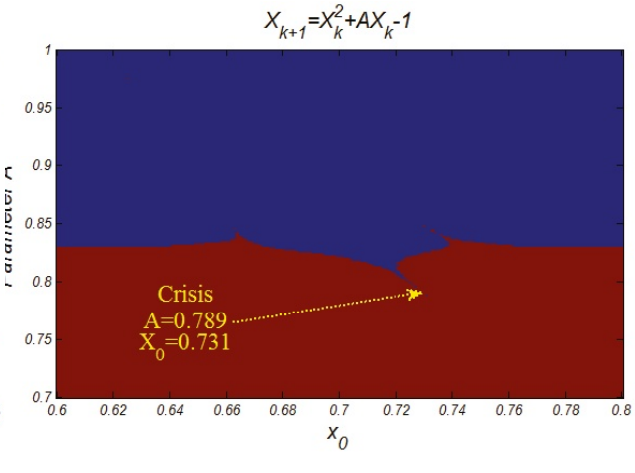
الف



ب



ت



پ

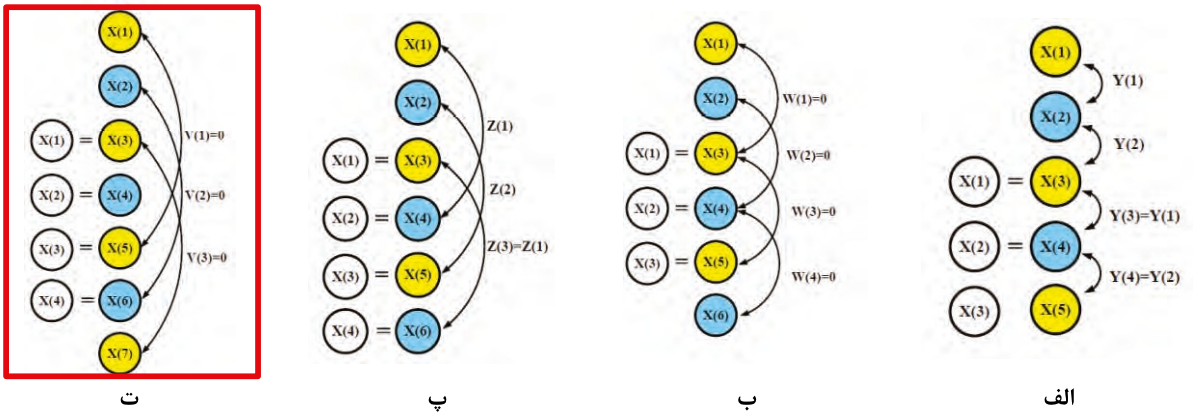
(شکل- ۴): ویژگی QBD در نمایش مقادیری از پارامتر و شرط اولیه که به ازای آنها نگاشت پایدار است. بررسی رفتار نگاشت شبه لاجستیک(معادله ۵) الف. نمایش تغییرات رفتار نگاشت با تغییر پارامتر کنترل و شرط اولیه. ب. نمایش وجود سه نقطه بحران در نگاشت شبه لاجستیک. پ. نمایش نقطه بحران ت. نواحی پریود دو و آشوب و پنجره پریودیک وسط آشوب

(Figure- 4): QBD property in representation of stable values of parameter and initial condition. Logistic-like behavior survey (Equation 5) a. variation of map behavior for control parameter and initial condition changes. b. three critical points in Logistic-like c. critical point representation d. period-2, chaos and periodic window

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

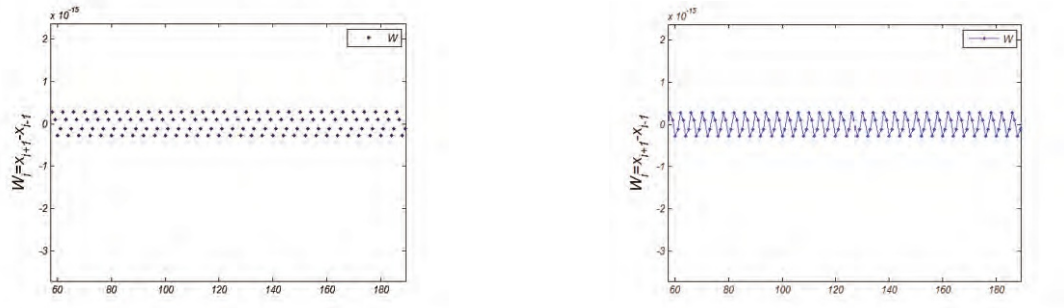
اگر دورهٔ تناوب سری عددی، دو باشد باید دوره تناوب دنبـاله‌هایی که بیان‌گر اختلاف هرنمونه با نمونهٔ بعدی (Y) اسـت، باید دو باشد. دورهٔ تناوب اختلاف هر نمونه با دو نمونهٔ بعد (W) بایسـتی صـفر باشد. دورهٔ تناوب اختلاف هر نمونه با سـه نمونهٔ بعد (Z) بایسـتی دو باشـد و در پایان دورهٔ تناوب هر نمونه با چهار نمونه پس از آن (V) بایستی صفر باشـد. (این موضـوع در (شکل ۵-الف) تا (شکل ۵-ت) نشان داده شـده اسـت) همان‌طور که در (شـکل ۵-ب) مشـاهده می‌شـود، نتایج حاصـل از شـبیه‌سـازی الگوریتم، بیان‌گر این مطلب اسـت که برخلاف انتظار، بردار W یک بردار با مقادیر صفر مطلق نیست و دورهٔ تناوب چهار در بردار W وجود دارد (شـکل۶). درصورتی‌که سری عددی دارای دوره تناوب چهار باشـد، باید دنباله‌های حاصـل از اختلاف هر نمونه با نمونهٔ بعدی، دو نمونه بعدتر، سـه نمونه و چهار نمونه پس از آن، همگی متناوب با دوره تناوب چهار باشـند. این موضـوع در (شـکل۷-الف) تا (شـکل۷-ت) نمایش داده شـده اسـت. در شـکل (۸) نتایج حاصـل از اجرای الگوریتم برای بردار V را نشان می‌دهد.



الف ب پ ت

(شکل- ۵): روابط حاکم بر دوره تناوب "دو" و اینکه در این تناوب بایستی نتایج معادله ۷ و ۹ صفر باشند. الف. نمایش معادله ۶. ب. نمایش معادله ۷. پ. نمایش معادله ۸. ت. نمایش معادله ۹

(Figure-5): Period-2 relations and zero values of W_k and V_k. a. Equation 6 representation. b. Equation 7 representation. c. Equation 8 representation. d. Equation 9 representation



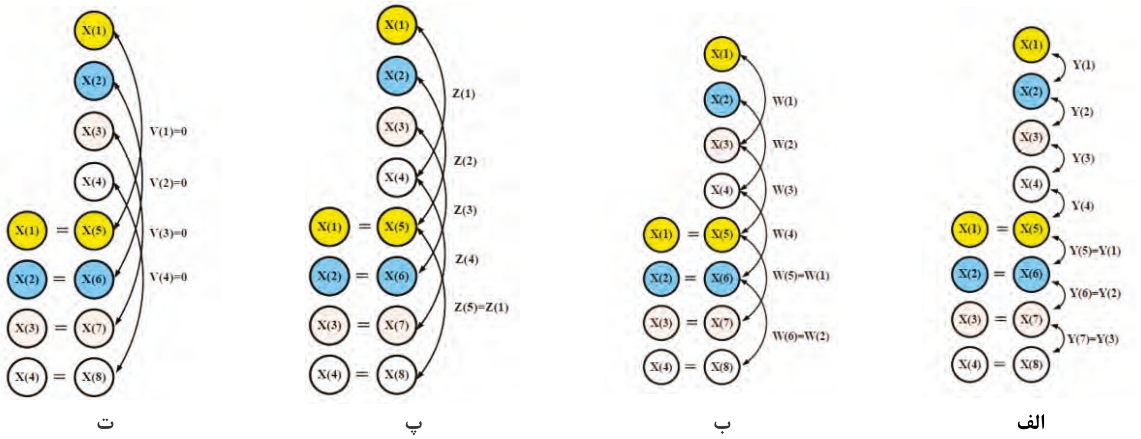
ب الف

(شکل- ۶): نتایج حاصل از شبیه سازی معادله ۷ (W) برای لاجستیک با A=3.252 که حاکی از آن است به ازای این پارامتر نگاشت لاجستیک پریود ۲ نمی‌دهد در حالی که مطابق شکل ۴- الف بایستی پریود ۲ باشد!

(Figure-6): simulation results of Equation 7 (Wk.) for logistic with A=3.252. Results show it is not Priod-4 but according to fig. 4-a it is proid-2 !

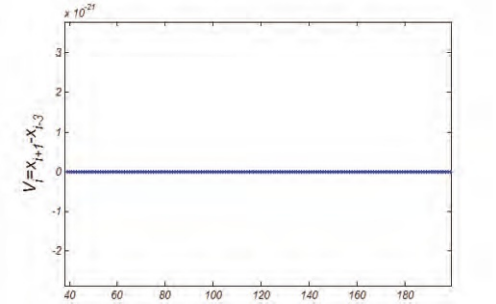
[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]



(شکل- ۷): روابط حاکم بر دوره تناوب "چهار" و اینکه در این تناوب بایستی نتایج معادله ۹ صفر باشند. . الف. نمایش معادله ۶. ب. نمایش معادله ۷. پ. نمایش معادله ۸. ت. نمایش معادله ۹

(Figure- 7): Period-4 and zero values of Vk. a. Equation 6 representation. b. Equation 7 representation. c. Equation 8 representation. d. Equation 9 representation



(شکل- ۸): نتایج حاصل از شبیه سازی معادله ۹ (V) برای لاجستیک با A=3.252 که حاکی از آن است به ازای این پارامتر نگاشت لاجستیک پریود ۴ است که در شکل۴-ب (QBD) هم قابل مشاهده است.

(Figure- 8): simulation results of Equation 9 (V_k) for logistic with A=3.252. Results show it is priod-4 that is obvious in fig. 4-b (QBD)

۳-۳- شناسایی دوره‌های تناوب طولانی، شبه‌متناوب، آشوب و ...

از آن‌جایی که در ترسیم نمودار دوشاخگی، به روش مرسوم فقط از مقادیر عددیِ نقاطِ سریِ زمانی استفاده می‌شود، لذا استفاده از آن به‌منظور افتراق دوره‌های تناوب بزرگ از آشوب امکان‌پذیر نیست.

در ترسیم نمودار دوشاخگی کیفی با تغییر مقدار پارامتر، از دورهٔ تناوبی با تکرار "یک" شروع می‌کنیم. به هنگام مشاهدهٔ نخستین تکرار جستجو متوقف شده و دورهٔ تناوب "یک" برای سری زمانی مذکور ثبت می‌شود. اگر یک سری زمانی، فاقد تکرار باشد، پس از بررسی دورهٔ تناوب "یک" ، به بررسی دورهٔ تناوب "دو" و پس از آن دوره‌های بالاتر می‌پردازیم. اگر این دورهٔ تناوب تا بی‌نهایت افزایش یابد به‌دلیل محدودبودن ارقام محاسبه، شاهد تکرار خواهیم بود و رفتارهای آشوب‌گونه هم متناوب با دورهٔ تناوب بسیار طولانی خواهند بود. در شرایط واقعی امکان آزمودن دوره‌های تناوب با دورهٔ تکرار بی‌نهایت وجود ندارد. درواقع طولانی‌ترین دورهٔ تکرار را براساس شرایط مسأله می‌توان انتخاب کرد. نمودار دوشاخگی کیفی با ترسیم دوره‌های تناوب به‌دست آمده برحسب تغییرات شرط اولیه و مقدار پارامتر به‌دست می‌آید.

در معادلهٔ لاجستیک (معادلهٔ ۱) وقتی مقدار A=3.567 باشد، دورهٔ تناوب سری زمانی حاصل ۳۲ خواهد بود. بنابراین پس از طی دوره گذرا (قسمت نارنجی‌رنگ در جدول ۱) $X_n = X_{n+32}$ می‌شود. با استفاده از نمودار دوشاخگی کیفی این دوره تناوب به‌سادگی قابل تشخیص است (شکل ۹). مقادیر سری زمانی تولیدشده از طریق نگاشت لاجستیک به‌ازای A=3.567 و X_1=0.75 در (جدول۱) آمده است. همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، فاصلهٔ بین نقاط تکرار -که با رنگ زرد مشخص شده است- برابر ۳۲ است؛ لذا دورهٔ تناوب این سری زمانی ۳۲ است.

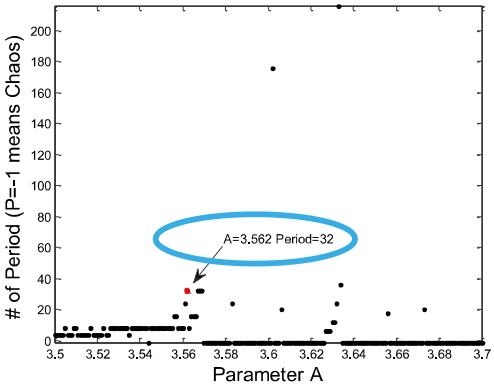
۴-۳- مشاهدهٔ پنجره‌های متناوب جدید

در شکل (۱۰) نمودار دوشاخگی کیفی و دوشاخگی مرسوم در بازهٔ $3.5 < A < 3.7$ با گام ۰/۰۰۱ مشاهده می‌شود. در این شکل نقاطی که به‌ازای پارمتر A یکسان پاسخ یکسان به‌دست آمده نشان داده شده‌اند. (به‌عنوان مثال وجود دورهٔ تناوب ۱۲ به ازای A=3.631 یا دوره تناوب ۸ به‌ازای A=3.551 در (شکل ۱۰ سمت چپ و راست مشهود است).

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

در شکل (۱۱) مقایسه QBD نمودار دوشاخگی مرسوم در نقاطی که پاسخ یکسان ندارند پرداخته‌ایم. همانطور که مشاهده می‌شود با استفاده از QBD دوره‌های تناوب و پنجره‌های متناوب جدیدی قابل مشاهده است که در نمودار دوشاخگی معمول قابل مشاهده نیست. (به‌عنوان مثال در A=3.633 دورهٔ تناوب ۲۱۶ و به‌ازای A=3.673 دورهٔ تناوب ۲۰ به‌دست آمده است که هیچ کدام از روی دیاگرام دوشاخگی معمول قابل تشخیص نیست)



(شکل- ۹): QBD نگاشت لاجستیک به ازای $x_1=0.75$ در بازه

$$3.5 < \mathbf{A} < 3.7$$

(Figure- 9): QBD of logistic map for $x_1=0.75$ and 3.5<A<3.7

(جدول- ۱): مقادیر سری زمانی لاجستیک به ازای A=3.567 و مقدار اولیه $X_1=0.75$ و بررسی دوره تناوب ۳۲ – قسمت نارنجی رنگ مربوط به دورهٔ گذراست و قسمت سفید وضعیت پایدار نگاشت است و تکرارها یا زرد مشخص شده است.

(Table-1): time series values of logistic for A=3.567 and $X_1=0.75$ and detection of period-32. Orang segment is transient state, white is steady state and yellow highlight is repetitions.

Time Series:	(1) 0.750000000000	0.668812500000000
0.790098846222656	0.591560766152152	0.861846505304518
0.424712369238303	0.871531433057854	0.399376994289669
0.855634163244728	0.440611327675804	(11) 0.879169139633664
0.378925133580949	0.839460907265979	0.480711365126910
0.890422892530401	0.348032065112891	0.809372798714848
0.550346977538527	0.882708303668706	0.369307041798877
(21) 0.830823323863574	0.501362996559487	0.891743373371431
0.344347940639611	0.805330280698975	0.559210788028113
0.879244392566748	0.378721554750723	0.839284918606813
0.481137448869288	(31) 0.890480876255989	0.347870552387893
0.809197603380662	0.550733535641057	0.882568928524963
0.369687500245543	0.831177533138425	0.500526581988686
0.891749010911597	0.344332185308386	(41) 0.805312784750413
0.559248897070172	0.879228289755019	0.378765120457908
0.839322604905272	0.481046225677672	0.890468571083693
0.347904830250230	0.809234800661459	0.550651480359549
(51)0.882598603025857	0.369606508069818	0.831102215414459
0.500704508954222	0.891748229580665	0.344334368921019
0.805315209709891	0.559243615241545	0.879230522187450
0.378759080784796	(61) 0.839317381124509	0.481058870929892
0.890470280356603	0.347900068884427	0.809229634275193
0.550662877731270	0.882594484148891	0.369617750312775
0.831112672803499	0.500679807341128	(71) 0.891748351553679
0.344334028039097	0.805314831153758	0.559244439781230
0.879230173698315	0.378760023597514	0.839318196590905
0.481056896936010	0.890470013604777	0.347900811952055
(81)0.809230440561721	0.550661099025225	0.882595127013500
0.369615995657964	0.831111040705662	0.500683662604275
0.891748332803617	0.344334080440507	0.805314889346617
0.559244313030420	(91) 0.879230227269466	0.378759878664608
0.839318071234592	0.481057200385480	0.890470054612640
0.347900697720011	0.809230316611270	0.550661372466057
0.882595028187265	0.369616265397580	(101)0.831111291606265
0.500683069940154	0.891748335692935	0.344334072365637

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]
[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

0.805314880379306	0.559244332562265	0.879230219014351
0.378759900998230	0.839318090551544	0.481057153625027
(111)0.890470048293521	0.347900715322633	0.809230335711459
0.550661330330102	0.882595043415961	0.369616223831875
0.831111252943604	0.500683161267074	0.891748335247867
0.344334073609482	(121)0.805314881760623	0.559244329553598
0.879230220285961	0.378759897557979	0.839318087575979
0.481057160827965	0.890470049266913	0.347900712611138
0.809230332769280	0.550661336820694	(131)0.882595041070144
0.369616230234624	0.831111258899171	0.500683147199145
0.891748335316429	0.344334073417870	0.805314881547833
0.559244330017078	0.879230220090072	0.378759898087944
(141)0.839318088034359	0.481057159718365	0.890470049116964
0.347900713028839	0.809230333222518	0.550661335820829
0.882595041431513	0.369616229248291	0.831111257981726
0.500683149366286	(151)0.891748335305867	0.344334073447388
0.805314881580613	0.559244329945680	0.879230220120248
0.378759898006303	0.839318087963747	0.481057159889297
0.890470049140063	0.347900712964493	(161)0.809230333152697
0.550661335974857	0.882595041375845	0.369616229400234
0.831111258123058	0.500683149032440	0.891748335307494
0.344334073442841	0.805314881575563	0.559244329956678
(171)0.879230220115600	0.378759898018880	0.839318087974625
0.481057159862964	0.890470049136505	0.347900712974406
0.809230333163453	0.550661335951128	0.882595041384421
0.369616229376826	(181)0.831111258101284	0.500683149083873
0.891748335307243	0.344334073443541	0.805314881576341
0.559244329954985	0.879230220116316	0.378759898016943
0.839318087972949	0.481057159867020	(191)0.890470049137053
0.347900712972879	0.809230333161797	0.550661335954782
0.882595041383100	0.369616229380431	0.831111258104638
0.500683149075950	0.891748335307282	0.344334073443433
(201)0.805314881576221	0.559244329955245	0.879230220116206
0.378759898017241	0.839318087973207	0.481057159866396
0.890470049136969	0.347900712973114	0.809230333162051
0.550661335954220	(211)0.882595041383303	0.369616229379877
0.831111258104122	0.500683149077169	0.891748335307276
0.344334073443450	0.805314881576240	0.559244329955205
0.879230220116222	0.378759898017196	(221)0.839318087973168
0.481057159866491	0.890470049136981	0.347900712973078
0.809230333162013	0.550661335954305	0.882595041383273
0.369616229379960	0.831111258104200	0.500683149076985
(231)0.891748335307277	0.344334073443447	0.805314881576237
0.559244329955210	0.879230220116220	0.378759898017202
0.839318087973173	0.481057159866479	0.890470049136980
0.347900712973083	(241)0.809230333162018	0.550661335954295
0.882595041383276	0.369616229379951	0.831111258104190
0.500683149077007	0.891748335307277	0.344334073443448
0.805314881576238	0.559244329955209	(251)0.879230220116221
0.378759898017200	0.839318087973172	0.481057159866482
0.890470049136980	0.347900712973081	0.809230333162016
0.550661335954298	0.882595041383275	0.369616229379953
(261)0.831111258104193	0.500683149077001	0.891748335307277
0.344334073443447	0.805314881576237	0.559244329955210
0.879230220116220	0.378759898017202	0.839318087973173
0.481057159866479	(271)0.890470049136980	0.347900712973083

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

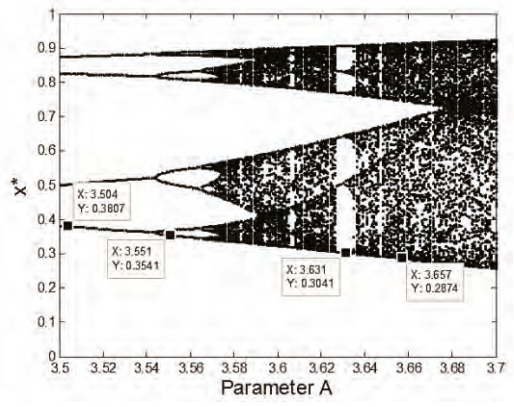
[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

0.809230333162018	0.550661335954295	0.882595041383276
0.369616229379951	0.831111258104190	0.500683149077007
0.891748335307277	0.344334073443448	(281)0.805314881576238
0.559244329955209	0.879230220116221	0.378759898017200
0.839318087973172	0.481057159866482	0.890470049136980
0.347900712973081	0.809230333162016	0.550661335954298
(291)0.882595041383275	0.369616229379953	0.831111258104193
0.500683149077001	0.891748335307277	0.344334073443447
0.805314881576237	0.559244329955210	0.879230220116220
0.378759898017202	(301)0.839318087973173	0.481057159866479
0.890470049136980	0.347900712973083	0.809230333162018
0.550661335954295	0.882595041383276	0.369616229379951
0.831111258104190	0.500683149077007	(311)0.891748335307277
0.344334073443448	0.805314881576238	0.559244329955209
0.879230220116221	0.378759898017200	0.839318087973172
0.481057159866482	0.890470049136980	0.347900712973081
(321)0.809230333162016	0.550661335954298	0.882595041383275
0.369616229379953	0.831111258104193	0.500683149077001
0.891748335307277	0.344334073443447	0.805314881576237
0.559244329955210	(331)0.879230220116220	0.378759898017202
0.839318087973173	0.481057159866479	0.890470049136980
0.347900712973083	0.809230333162018	0.550661335954295
0.882595041383276	0.369616229379951	(341)0.831111258104190
0.500683149077007	0.891748335307277	0.344334073443448
0.805314881576238	0.559244329955209	0.879230220116221
0.378759898017200	0.839318087973172	0.481057159866482
(351)0.890470049136980	0.347900712973081	0.809230333162016
0.550661335954298	0.882595041383275	0.369616229379953
0.831111258104193	0.500683149077001	0.891748335307277
0.344334073443447	(361)0.805314881576237	0.559244329955210
0.879230220116220	0.378759898017202	0.839318087973173
0.481057159866479	0.890470049136980	0.347900712973083
0.809230333162018	0.550661335954295	(371)0.882595041383276
0.369616229379951	0.831111258104190	0.500683149077007
0.891748335307277	0.344334073443448	0.805314881576238
0.559244329955209	0.879230220116221	0.378759898017200
(381)0.839318087973172	0.481057159866482	0.890470049136980
0.347900712973081	0.809230333162016	0.550661335954298
0.882595041383275	0.369616229379953	0.831111258104193
0.500683149077001	(391)0.891748335307277	0.344334073443447
0.805314881576237	0.559244329955210	0.879230220116220
0.378759898017202	0.839318087973173	0.481057159866479
0.890470049136980	0.347900712973083	(401)0.809230333162018
0.550661335954295	0.882595041383276	0.369616229379951
0.831111258104190	0.500683149077007	0.891748335307277
0.344334073443448	0.805314881576238	0.559244329955209
(411)0.879230220116221	0.378759898017200	0.839318087973172
0.481057159866482	0.890470049136980	0.347900712973081
0.809230333162016	0.550661335954298	0.882595041383275
0.369616229379953	(421)0.831111258104193	0.500683149077001
0.891748335307277	0.344334073443447	0.805314881576237
0.559244329955210	0.879230220116220	0.378759898017202
0.839318087973173	0.481057159866479	(431)0.890470049136980
0.347900712973083	0.809230333162018	0.550661335954295
0.882595041383276	0.369616229379951	0.831111258104190
0.500683149077007	0.891748335307277	0.344334073443448

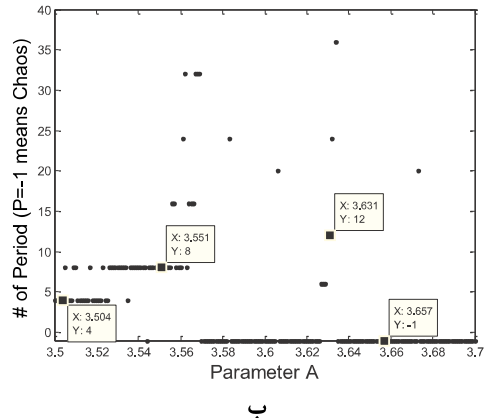
[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

(441)0.805314881576238	0.559244329955209	0.879230220116221
0.378759898017200	0.839318087973172	0.481057159866482
0.890470049136980	0.347900712973081	0.809230333162016
0.550661335954298	(451)0.882595041383275	0.369616229379953
0.831111258104193	0.500683149077001	0.891748335307277
0.344334073443447	0.805314881576237	0.559244329955210
0.879230220116220	0.378759898017202	(461)0.839318087973173
0.481057159866479	0.890470049136980	0.347900712973083
0.809230333162018	0.550661335954295	0.882595041383276
0.369616229379951	0.831111258104190	0.500683149077007
(471)0.891748335307277	0.344334073443448	0.805314881576238
0.559244329955209	0.879230220116221	0.378759898017200
0.839318087973172	0.481057159866482	0.890470049136980
0.347900712973081	(481)0.809230333162016	0.550661335954298
0.882595041383275	0.369616229379953	0.831111258104193
0.500683149077001	0.891748335307277	0.344334073443447
0.805314881576237	0.559244329955210	(491)0.879230220116220
0.378759898017202	0.839318087973173	0.481057159866479
0.890470049136980	0.347900712973083	0.809230333162018
0.550661335954295	0.882595041383276	0.369616229379951
(501)0.831111258104190		



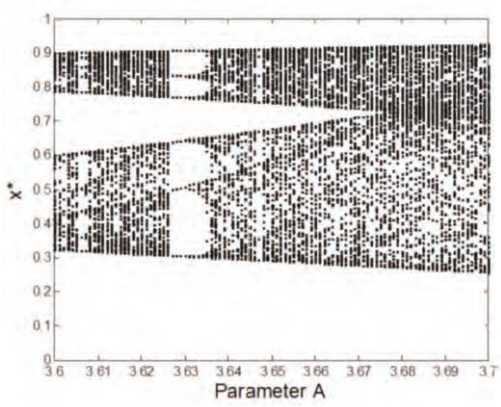
الف



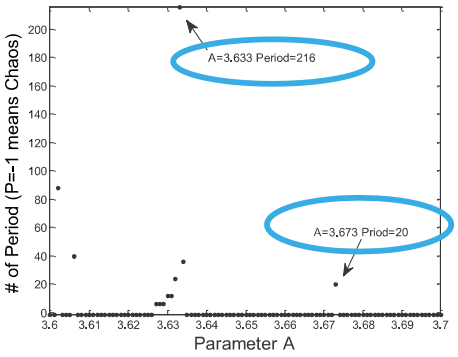
ب

(شکل-۱۰): مقایسه QBD و نمودار دوشاخگی مرسوم به ازای X_1=0.42 (وقتی پاسخ یکسان دارند). الف. معمول ب. QBD

(Figure- 10): comparison of QBD and conventional bifurcation diagram for X_1=0.42 (when they both have the same response) a. conventional b. QBD



الف



ب

(شکل-۱۱): مقایسه QBD و نمودار دوشاخگی مرسوم در نقاطی که پاسخ یکسان ندارند.

(Figure- 11): comparison of QBD with conventional bifurcation diagram (while not having the same response) a. conventional b. QBD

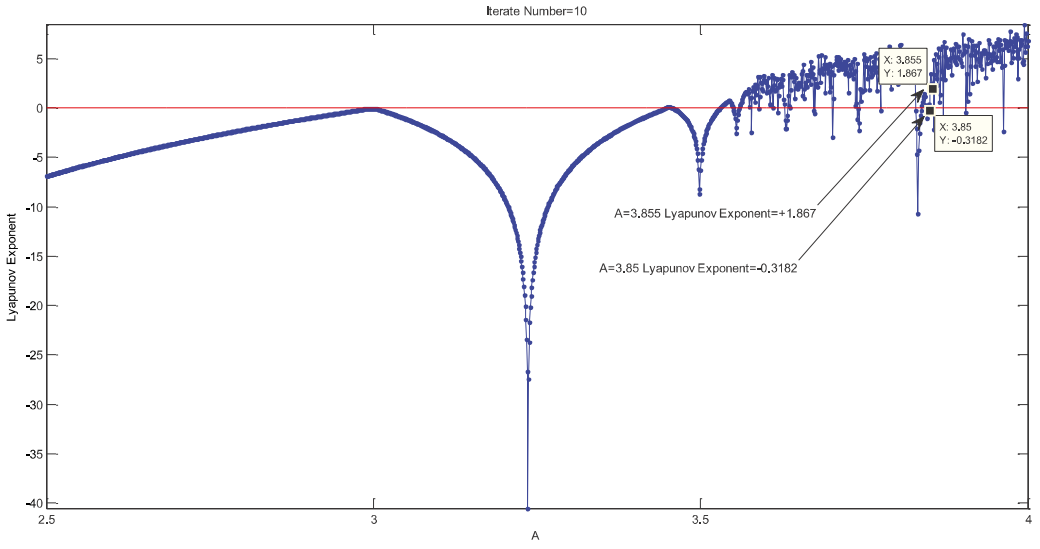
[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

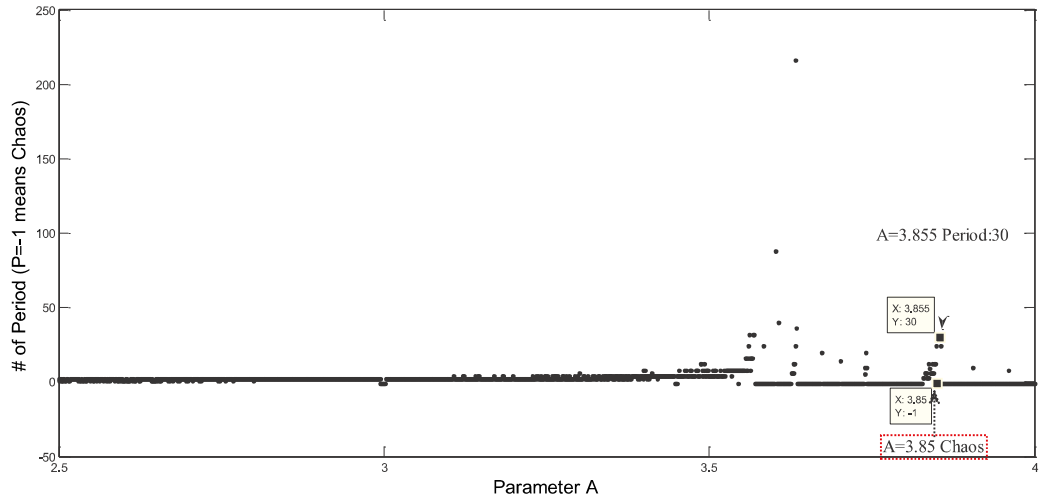
۳-۵- ارزیابی صحت مقادیر نمای لیاپانوف

از مقایسه نمودار کیفی با نمودار نمای لیاپانوفی که با استفاده از فرمول (۴) محاسبه شده است، نکات قابل تأملی حاصل شد. نخست این‌که با وجود آشوب‌گونه‌بودن رفتارنگاشت به‌ازای مقادیری خاص از پارامتر، نمای لیاپانوف محاسبه‌شده منفی است که نشان‌دهندهٔ وجود یک رفتار متناوب است. نکته دوم مثبت‌بودن نمای لیاپانوف در برخی از مقادیر پارامتر که رفتار نگاشت متناوب است. به‌عنوان مثال در A=3.8555 نمای لیاپانوف مثبت است (به‌عبارت دیگر بایستی نگاشت آشوب‌ناک باشد) درحالی‌که سری زمانی متناوب با با دورهٔ تناوب 60 و نمای لیاپانف به ازای A=3.85 منفی است در حالی که رفتار نگاشت آشوب‌گونه است (شکل ۱۲). این اختلاف ممکن است، مربوط به روش محاسبهٔ نمای لیاپانوف و جزئیات آن از قبیل تعداد نمونه‌ها (n) یا نقطه شروع (x_0) باشد. در ادامه نمای لیاپانوف به‌ازای مقادیر مختلف n و x_0 محاسبه و نتایج تکرار شد.

بنابراین صحت فرمول (۴) را مورد بررسی قرار دادیم. نخستین نکته دورشدن نمایی دو تراژکتوری از هم است که از مفاهیم خطی‌سازی وام گرفته شده و با پویایی لاجستیک تطابق ندارد. نکته دوم جایگزین کردن تفاضل با مشتق معادلهٔ نگاشت است.



الف



ب

(شکل-۱۲): بررسی نمای لیاپانوف در نمودار دوشاخگی مرسوم و QBD و وجود نقطه A=3.855 با نمای لیاپانوف مثبت اما پریود 30 و نقطه A=3.85 با نمای لیاپانوف منفی اما با رفتار آشوبی که در نمودار QBD بخوبی قابل مشاهده است. الف. نمای لیاپانوف ب. QBD

(Figure- 12): Lyapunov Exponent (LE) for conventional and QBD and exciting points with positive LE but period-30 (at A=3.855) and negative LE but chaotic behavior that is crystal clear in QBD. a. LE b. QBD

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]
[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

دو سری زمانی x و x' را در نظر بگیرید، در ابتدا فاصلهٔ بین نقاط مقدار کمی مانند d است؛ به دلیل عدم پیوستگی، نگاشت لاجستیک مشتق‌پذیر نیست. علاوه‌براین در یک نگاشت، محاسبه تفاضل[1] با استفاده از معادله، امکان‌پذیر نیست. بنابراین اختلاف بین تراژکتوری‌ها را با روابط زیر دنبال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x'_k - x_k &= |d_0| \\ x'_{k+1} - x_{k+1} &= |d_1| \\ &\cdots \\ x'_{k+n} - x_{k+n} &= |d_n| \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

حال سعی می‌کنیم $|d_1|$ را از $|d_0|$ محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} x'_{k+1} &= A x'_k \left(1 - x'_k\right) \\ x_{k+1} &= A x_k \left(1 - x_k\right) \\ x'_{k+1} - x_{k+1} &= A x'_k \left(1 - x'_k\right) - A x_k \left(1 - x_k\right) \\ &= A\left(x'_k - {x'_k}^2 - x_k + {x_k}^2\right) \\ &= A\left(x'_k - x_k\right)\left(1 - \left(x'_k + x_k\right)\right) \\ &= A d_0 \left(1 - \left(x'_k - x_k + 2x_k\right)\right) \\ x'_{k+1} - x_{k+1} &= A d_0 \left(1 - d_0 - 2x_k\right) = d_1 \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

اگر سری زمانی، آشوب‌گونه باشد؛ انتظار می‌رود که $|d_1| > |d_0|$ باشد و اگر آشوبناک نباشد؛ بایستی داشته باشیم: $|d_1| > |d_0|$.

بنابراین لازم است $|A\left(1 - d_0 - 2x_k\right)| < 1$ باشد تا سری متناوب باشد. مقدار A برای یک سری زمانی مشخص است؛ اما x_k دارای مقداری دلخواه است که باید در شرط زیر صدق کند. (با فرض کوچک‌بودن d_0 که شرط استفاده از مشتق در فرمول (۴) است.

$$0.5\left(1 - \frac{1}{A}\right) < x_k < 0.5\left(1 + \frac{1}{A}\right) \qquad (۱۲)$$

بنابراین برای رسیدن به نقطه پایدار $X^* = 1 - \frac{1}{A}$ (معادله ۲) داریم:

$$x_k = 1 - \frac{1}{A}$$

آن‌گاه محدوده‌ای که به‌ازای آن نگاشت در نقطه مذکور پایدار است، یعنی $1 < A < 3$ به‌دست خواهد آمد.

شرط اخیر در محاسبه نمای لیاپانوف وجود ندارد. به همین ترتیب باید شرایط مشابهی برای x های بعدی وجود داشته باشد. نکته دوم که باعث نادرست‌بودن معادله ۴ می‌شود، این است که در یک سری زمانی آشوب‌گونه مقدار فاصله با گذشت چند تکرار بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود و دیگر مشتق، تقریب مناسبی نیست.

۳-۶- مقایسهٔ نمودار دوشاخگی کیفی با تحلیل کمی‌سازی بازگشت

بازگشت یک مشخصه اساسی برای بسیاری از سامانه‌های پویای پیچیده است [19]. مفهوم رسمی بازگشت‌ها نخستین‌بار توسط هانری پوآنکاره در سال ۱۸۹۰ ارائه شد [20]. با این وجود مباحث مطرح‌شده توسط پوآنکاره تا مدت‌ها به‌دلیل فقدان ابزار پردازشی مناسب مسکوت ماند [8]. یکی از کاربردهای مهم پوآنکاره در سالهای اخیر کاربرد آن در پردازش سیگنال جهت استخراج اطلاعات است [21]،[22]. در سال ۱۹۸۷ روش منحنی‌های بازگشتی (RQA[2]) به‌منظور تجسم دیداریِ بازگشتِ سامانه‌های پویا ارائه شد [23]. در منحنی‌های بازگشتی سه ساختار با مقیاس کوچک شامل خطوط عمودی، خطوط قطری و نیز نقاط منفرد قابل مشاهد است.

۱- نقاط منفرد: در نمودار بازگشتی نشان‌دهنده کم‌بودن حالات سامانه یا عدم باقی‌ماندن آنها در طول زمان و یا عدم ثبات و نوسان حالات است.

۲- خطوط قطری: یک خط قطری به طول L هنگامی به‌وقوع می‌پیوندد که یک قسمت از تراژکتوری، به‌طور تقریبی، موازی با قسمتی دیگر از تراژکتوری پیموده شود.

۳- خطوط عمودی: یک خط عمودی با طول v نشان‌دهنده ظهور وضعیتی پایدار به مدت v واحد زمانی است. به بیانی دیگر سامانه برای چند لحظه در تله گیر کرده است.

به‌منظور بررسی کمی ساختارهای موجود در منحنی‌های بازگشتی ویژگی‌های متعددی در مقالات ارائه شده است.[24] از این میان با توجه به بحث عدم قطعیت سری‌های زمانی آشوب‌گونهٔ حاصل از نگاشت‌های بازگشتی تنها به ویژگی قطعیت[3] بسنده می‌کنیم.

قطعیت: این ویژگی عبارت است از نسبت نقاط بازگشتی که از ساختار قطری (با طول حداقل Lmin) پیروی می‌کنند، به کل نقاط بازگشتی:

[1] Difference
[2] Recurrent Quantification Analysis
[3] Determinist

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]
[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

$$DET = \frac{\sum_{l=Lmin}^{N} Lp(l)}{\sum_{l=1}^{N} lp(l)} \qquad (۱۳)$$

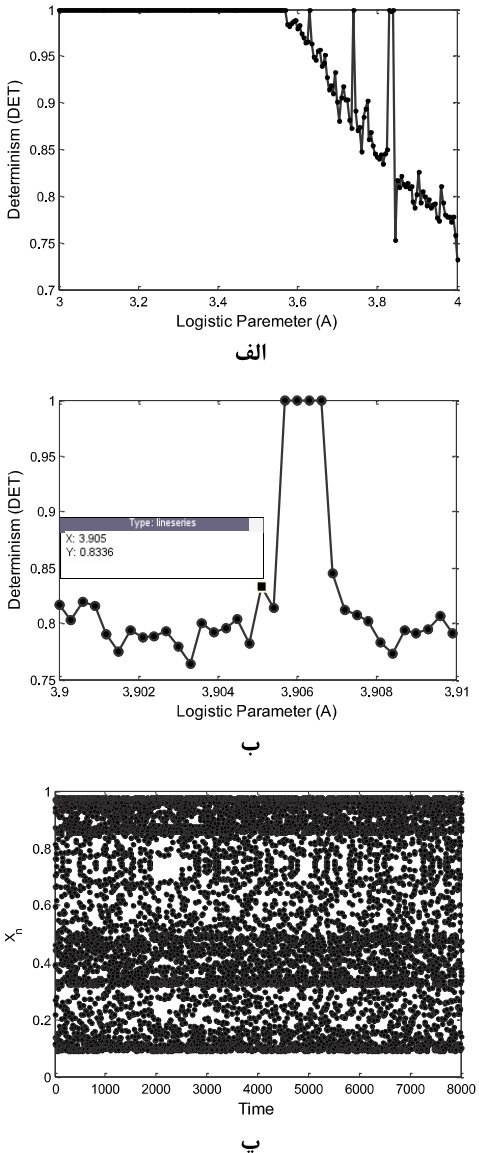
که در معادله ۱۲، $p(l)$ هیستوگرام خطوط قطری به طول l است. پیدایش خطوط قطری در منحنی‌های بازگشتی به‌علت حرکت موازی دو قطعه از تراژکتوری است [24].

اگرچه ویژگی‌های دیگری نیز به‌منظور تحلیل کمی‌سازی بازگشت‌ها معرفی شده است، می‌توان قطعیت را پرکاربردترین آنها دانست. برای ارزیابی قابلیت استفاده از این ویژگی در تحلیل پویایی سامانه‌های آشوب‌گونه آزمایش زیر را طراحی کردیم. در این آزمایش از دو سری زمانی استفاده شده است. (۱) سری زمانی تولید شده توسط نگاشت بازگشتی لاجستیک در حالت آشوب. (۲) سری زمانی سینوسی. هدف مقایسه مقدار ویژگی مورد نظر در دینامیک آشوب نسبت به مقدار آن در دینامیک قطعیِ سری زمانی سینوسی است.

نتایج شبیه‌سازی انجام‌شده برای معادله لاجستیک با شرط اولیه $x_0 = 1 + \frac{1}{A} + 0.02$ (برای قرارگیری سریع در بستر جذب) و تعداد 2000 نمونه، در شکل (۱۳) نمایش داده شده است. بررسی نمودار شکل (۱۳) دو نکته مهم را در بر دارد:

(۱) با افزایش پارامتر A مقدار DET به‌طور نسبی کاهش می‌یابد؛ به‌عبارت دیگر افت نمودار را شاهد هستیم. (شکل ۱۳ -الف)

(۲) در (شکل ۱۳-ب) محدودهٔ تغییرات A را بسیار کوچک‌تر ($3.9 > A > 3.91$) در نظر گرفته‌ایم؛ مشاهده می‌شود در A=3.9051 مقدار معیار قطعیت 0.8336 است. (DET=0.8336) حال به بررسی و مقایسه پاسخ به‌دست آمده از پاسخ سینوسی با فرکانس 80^{Hz} و فرکانس نمونه‌برداری 1000^{Hz} در سیگنالی به طول 8000 نمونه می‌پردازیم. نتایج حاکی از آن است که مقدار معیار قطعیت 0.8828 است (DET=0.8828) و نکتهٔ مهم این است که نگاشت لاجستیک در A=3.9051 رفتار آشوبگون دارد؛ درحالی‌که تفاوت چندانی از نظر معیار DET با سیگنال سینوسی ندارد. (شکل ۱۳-پ) با افزودن نوفهٔ سفید با SNR=20dB به سیگنال سینوسی با دامنهٔ یک و فرکانس 80^{Hz} مقدار معیار قطعیت به 0.2821 کاهش می‌یابد (DET= 0.2821). نکتهٔ مهم در RQA عدم تمایز بین سیگنال آشوبی و تصادفی است و با اندکی نوفه به‌شدت پارامترها تحت تأثیر قرار می‌گیرند. *اگر چه در نگاه کلی معیار DET* (به‌عنوان پر کاربردترین ویژگی استخراج‌شده از RQA و بر گرفته از خطوط قطری) می‌تواند درست باشد اما در جزئیات نمی‌تواند رفتار را توصیف کند.



(شکل-۱۳): منحنی تغییرات معیار *DET* در منحنی های بازگشتی برای نگاشت لاجستیک به ازای تغییرات پارامتر A
الف. 3<A<4 ب. 3.9<A<3.91 پ. نمودار زمانی
(Figure- 13): DET variation in recurrent plot of logistic map for variation of a. 3<A<4 b. 3.9<A<3.91 c. time plot

۴- بحث و بررسی

در این مقاله QBD به‌عنوان یک روش جدید که مبتنی بر نگاه کیفی به دوشاخگی است، معرفی شد. این روش به‌دلیل کیفی‌بودن (نه مانند روش مرسوم که کمی است) ویژگی‌های بارز زیادی دارد و در مطالعات مبتنی بر نگاشت می‌تواند

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]
[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

تأثیرگذار باشد. سؤال مهمی که منجر به ابداع QBD شد، این بود که اگر به‌عنوان‌مثال دورهٔ تناوب 150 داشته باشیم و صد نمونه آخر در دوشاخگی برداشته شده باشد، تکلیف چیست؟ این صد نمونه را در نمودار دوشاخگی با صد نقطه نمایش می‌دهند و ممکن است چنین تصور شود که دارای رفتار آشوب‌گونه است. همچنین در مقادیری مثل A=3.252 به‌دلیل خطای تعداد ارقام اعشار، به‌نظر می‌رسد متناوب با دورهٔ تناوب دو است. شاید سؤال شود، این دقت کجا لازم است؟ در پاسخ باید به وجود ابر رایانه‌ها اشاره کرد که به‌علت تعداد بیت‌های محاسباتی بالاتر در محاسبات دقیق مورد استفاده قرار می‌گیرند. علاوه‌برآن، فقط اشکال در دقت و تعداد اعشار نیست؛ بلکه نشان داده شد، برخلاف نمودارهای دوشاخگی مرسوم نظمی که در نمودار دوشاخگی کیفی دیده می‌شود، یک نظم موزاییکی (نظمی که با چینش اجزا در کنار هم حاصل می‌شود و از اندرکنش پدید نیامده) نیست؛ زیرا نگاشت لاجستیک ویژگی‌هایی دارد که در نمودار دوشاخه‌شدگی مرسوم قابل مشاهده نیست. (به‌عنوان مثال می‌توان به دوره تناوب‌های بزرگ و پنجره‌های متناوب جدیدی اشاره کرد که در دیاگرام دوشاخه‌شدگی مرسوم قابل مشاهده نیست.)

به‌طور خلاصه QBD ویژگی‌های منحصربه‌فردی دارد که برخی از آنها عبارتند از: ۱- شناسایی مقادیر شرط اولیه و پارامتر که نگاشت در آنها پایدار است. ۲-تشخیص صحیح دورهٔ تناوب. ۳-شناسایی دورهٔ تناوب‌های بزرگ، شبه‌متناوب، آشوب و ... ۴-مشاهدهٔ پنجره‌های متناوب جدید. ۵-امکان ارزیابی نمای لیاپانوف. ۶-هزینهٔ محاسباتی بسیار پایین‌تر از روش‌های مرسوم. ۷-امکان نمایش در دو بعد و یا سه بعد نمودار دوشاخگی که به‌تفصیل درخصوص آنها توضیح داده شد.

در بررسی نمای لیاپانوفِ نگاشت لاجستیک به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر A، به سری‌های زمانیِ متناوبی برخورد کردیم که نمای لیاپانوف مثبت داشتند و سری‌های زمانی آشوب‌گونی که نمای لیاپانوف مثبت داشتند. علت بروز چنین اختلافی را می‌توان در تصور دورشدن نمایی دو تراژکتوری در لیاپانوف از هم دانست که از مفاهیم خطی‌سازی وام گرفته شده و با دینامیک لاجستیک تطابق ندارد؛ علاوه‌بر این می‌توان به نادرستی قراردادن مشتق معادلهٔ نگاشت به‌جای تفاضل به‌علت ماهیت گسسته آن اشاره کرد.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش نمودار دوشاخه‌شدگی کیفی به‌عنوان یک جایگزین مناسب برای نمودارهای دوشاخه‌شدگی معمول معرفی شد. نمودار دوشاخگی کیفی ویژگی‌های خاصی دارد که برخی از آنها عبارتند از: (۱) شناسایی مقادیری از شرط اولیه و پارامتر که نگاشت به‌ازای آن مقادیر پایدار است. (۲) تشخیص صحیح دوره‌های تناوب. (۳)شناسایی دوره‌های تناوب طولانی، شبه‌متناوب، آشوب و ... (۴) مشاهده پنجره‌های متناوب جدید. (۵) امکان بررسی دقیق نمای لیاپانوف. (۶) هزینهٔ محاسباتی بسیار پایین‌تر از روش‌های مرسوم. (۷) امکان نمایش نمودار دوشاخگی در دو و یا سه بعد. با توجه به ویژگی‌های ذکرشده و کاربرد وسیع نگاشت‌ها در علوم مختلف، به‌خصوص در مدل‌سازی‌های مبتنی بر نگاشت، نمودار دوشاخگی کیفی می‌تواند ابزاری قدرتمند برای بررسی رفتار نگاشت‌ها باشد.

با استفاده از نمودار دوشاخه‌شدگی کیفی، بدون داشتن اطلاعات خاصی از نگاشت، حتی امکان ترسیم نمودار دوشاخگی دو بعدی (نمودار دوشاخگی برحسب تغییرات دو پارامتر) و بررسی مقادیری از پارامتر که نگاشت در آن پایداری می‌ماند، وجود دارد. نکته دیگری که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت، نمای لیاپانوف، به‌عنوان یکی از ابزارهای کمی‌سازی آشوب است که به‌صورت تحلیلی و عددی (با استفاده از نمودار دوشاخه‌شدگی کیفی) به اشکالات این روش اشاره شد. در پایان نیز بررسی تحلیل کمی‌سازی بازگشت با استفاده از نمودار دوشاخگی کیفی، حاکی از آن است که اگر چه در نگاه کلی معیار DET (به‌عنوان پر کاربردترین ویژگی استخراج‌شده از RQA و بر گرفته از خطوط قطری) می‌تواند درست باشد، اما در جزئیات نمی‌تواند رفتار را توصیف کند.

۶- مراجع — 6 - Reference

[1] D. Gulick, *Encounters with chaos*: McGraw-Hill, 1992.

[2] M. Ausloos, and M. Dirickx, *The logistic map and the route to chaos: from the beginnings to modern applications*: Springer Science & Business Media, 2006.

[3] B. Ibarz, J. M. Casado, and M. A. Sanjuán, "Map-based models in neuronal dynamics," *Physics Reports,* vol. 501, no. 1, pp. 1-74, 2011.

[4] E. M. Izhikevich, "Which model to use for cortical spiking neurons?," *IEEE transactions*

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]

Demand, 2000.

[16] J. A. Gallas, and H. E. Nusse, "Periodicity versus chaos in the dynamics of cobweb models," *Journal of Economic Behavior & Organization,* vol. 29, no. 3, pp. 447-464, 1996.

[17] A. Chen, J. Lu, J. Lü, and S. Yu, "Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* vol. 364, pp. 103-110, 2006.

[18] M. Özer, A. Čenys, Y. Polatoglu, G. Hacibekiroglu, E. Akat, A. Valaristos, and A. Anagnostopoulos, "Bifurcations of Fibonacci generating functions," *Chaos, Solitons & Fractals,* vol. 33, no. 4, pp. 1240-1247, 2007.

[19] S. Schinkel, N. Marwan, and J. Kurths, "Brain signal analysis based on recurrences," *Journal of Physiology-Paris,* vol. 103, no. 6, pp. 315-323, 2009.

[20] H. Poincaré, "Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique," *Acta mathematica,* vol. 13, no. 1, pp. A3-A270, 1890.

[21] G. Sadeghi Bajestani, A. Sheikhani, M. R. Hashemi Golpayegani, F. Ashrafzadeh, and P. Hebrani, "A Hierarchical Model for Autism Spectrum Disorder (HMASD)," *Razavi Int J Med,* vol. 4, no. 3, pp. e39107, 2016.

[22] G. Sadeghi Bajestani, M. R. Hashemi Golpayegani, A. Sheikhani, and F. Ashrafzadeh, "Poincaré Section analysis of the electroencephalogram in Autism Spectrum Disorder using Complement Plots," *Kybernetes,* vol. 46, no. 2, 2017.

[23] J.-P. Eckmann, S. O. Kamphorst, and D. Ruelle, "Recurrence plots of dynamical systems," *EPL (Europhysics Letters),* vol. 4, no. 9, pp. 973, 1987.

[24] N. Marwan, and A. Meinke, "Extended recurrence plot analysis and its application to ERP data," *International Journal of Bifurcation and Chaos,* vol. 14, no. 02, pp. 761-771, 2004.

on neural networks, vol. 15, no. 5, pp. 1063-1070, 2004.

[5] M. Courbage, and V. I. Nekorkin, "Map based models in neurodynamics," *International Journal of Bifurcation and Chaos,* vol. 20, no. 06, pp. 1631-1651, 2010.

[6] F. Mukhamedov, and W. N. F. A. W. Rozali, "On a p-adic cubic generalized logistic dynamical System." p. 012012.

[7] N. K. Pareek, V. Patidar, and K. K. Sud, "Image encryption using chaotic logistic map," *Image and vision computing,* vol. 24, no. 9, pp. 926-934, 2006.

[8] G. S. Bajestani, A. Sheikhani, S. M. R. H. Golpayegani, F. Ashrafzadeh, and P. Hebrani, "A New Approach for Solving Nonlinear Differential Equations with Poincare Map and Poincare Section," *Majlesi Journal of Electrical Engineering,* vol. 10, no. 3, pp. 33, 2016.

[9] M. Girardi-Schappo, M. Tragtenberg, and O. Kinouchi, "A brief history of excitable map-based neurons and neural networks," *Journal of neuroscience methods,* vol. 220, no. 2, pp. 116-130, 2013.

[10] G. Sadeghi Bajestani, A. Sheikhani, S. M. R. Hashemi Golpayegani, F. Ashrafza-deh, and P. Hebrani, "A systematic review, on the application of quantitative EEG for characterizing autistic brain," *Modern Rehabilitation,* vol. 9, no. 6, pp. 10-28, 2016.

[11] A. L. Lloyd, "The coupled logistic map: a simple model for the effects of spatial heterogeneity on population dynamics," *Journal of Theoretical Biology,* vol. 173, no. 3, pp. 217-230, 1995.

[12] M. J. Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations," *Journal of statistical physics,* vol. 19, no. 1, pp. 25-52, 1978.

[13] D. S. M. R. H. Golpaygani, *Chaos and its application* Amirkabir University of Technology, 2015.

[14] T.-Y. Li, and J. A. Yorke, "Period three implies chaos," *The American Mathematical Monthly,* vol. 82, no. 10, pp. 985-992, 1975.

[15] R. C. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*: Oxford University Press on

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]



قاسم صادقی بجستانی در سال ۱۳۸۴ مدرک کارشناسی خود را در رشته برق و در سال ۱۳۸۶ مدرک کارشناسی ارشد و در سال ۱۳۹۵ مدرک دکترای خود را - هر دو در رشتهٔ مهندسی پزشکی گرایش بیوالکتریک- دریافت کرد. ایشان عضو هیأت علمی دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) بوده و زمینه مورد علاقه وی نیز سایبرنتیک، کل نگری و آشوب با گرایش به تحلیل سیگنال EEG در اختلال طیف اوتیسم است. وی در گروه‌های تحقیقاتی علوم اعصاب و سیستم‌های سایبرنتیکی و مرکز تحقیقات مهندسی پزشکی مشغول پژوهش است و در زمینه ساخت تجهیزات پزشکی نیز در آزمایشگاه سیستم‌های سایبرنتیکی دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) فعال است.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

g.sadeghi@imamreza.ac.ir



عباس منزوی در سال ۱۳۸۰ مدرک کارشناسی خود را در رشته برق و در سال ۱۳۹۱ مدرک کارشناسی ارشد خود را در رشتهٔ مهندسی پزشکی گرایش بیوالکتریک دریافت کرده است. وی اکنون دانشجوی دکترای دانشگاه شاهد بوده و زمینه مورد علاقهٔ ایشان نیز سایبرنتیک، کل نگری و آشوب است و گرایش به تحلیل سیگنال EEG در بیماری صرع دارد. وی یکی از افراد فعال در آزمایشگاه سیستم‌های سایبرنتیکی دانشگاه بین‌المللی امام رضا(ع) است.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

abas_monzavi@yahoo.com



سیّد محمّدرضا هاشمی گلپایگانی

وی از چهره‌های ماندگار کشور است که کارشناسی ارشد خود را در سال ۱۳۴۷ در رشتهٔ برق و کارشناسی ارشد دیگری در سال ۱۳۵۱ در آمریکا در رشته مهندسی کنترل گذرانده است. وی دوره دکترا را در رشته مهندسی پزشکی و در آمریکا گذرانده است. وی در تابستان سال ۱۳۵۶ به ایران بازگشت و به تدریس و پژوهش در پلی‌تکنیک تهران پرداخت. زمینه پژوهش او سایبرنتیک، دینامیک غیرخطی، آشوب و فرکتال، مدل‌سازی زیستی و بیولوژی سیستمی است و از وی به‌عنوان پدر علم مهندسی پزشکی ایران یاد می‌شود. ایشان هدایت‌کنندهٔ آزمایشگاه سامانه‌های سایبرنتیکی و گروه تحقیقاتی سامانه‌های سایبرنتیکی دانشگاه بین‌المللی امام رضا (ع) می‌باشند.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

m.r.hashemig@aut.ac.ir

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-04]

[DOI: 10.18869/acadpub.jsdp.13.3.17]