الگوریتم توزیع‌شده و مشارکتی به‌منظور بازسازی سیگنال‌های تنک در شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم با توپولوژی افزایشی دوجهته

قنبر آذرنیا*[۱]، محمدعلی طینتی[۲] و توحید یوسفی رضایی[۳]

[۱]دانشکده فنی و مهندسی خوی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

[۲ و ۳]دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

مسأله دریافت فشرده در همین اواخر توجه زیادی در پردازش سیگنال به خود جلب کرده به‌طوری که بخش اعظمی از پژوهش‌ها در این حوزه به این مسأله معطوف شده است. از جمله حوزهٔ کاربردی دریافت فشرده، کاربرد آن در شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم است. ساختمان این شبکه‌ها که متشکل از حس‌گرهای بی‌سیم با توان محدود است، ایجاب می‌کند تا الگوریتم‌هایی که برای این کاربرد ارتقا داده می‌شوند، به لحاظ مصرف انرژی بهینه باشند. به عبارتی، الگوریتم‌های طراحی‌شده برای این زمینه می‌بایست پیچیدگی‌های محاسباتی کمتری داشته و نیازمند کمترین تبادلات بین حس‌گرها باشند. بر همین اساس، در این مقاله الگوریتم بازسازی دریافت فشردهٔ توزیع‌شده‌ای برحسب مد مشارکتی افزایشی دوجهته پیشنهاد شده است؛ در حقیقت، نخست یک چهارچوب جامع توزیع‌شده برای بازسازی سیگنال‌های تنک در شبکه‌های حس‌گری ارائه شده و سپس این چهارچوب برای مسائل بهینه‌سازی متفاوتی پیاده شده است. پیچیدگی پایین محاسباتی و عملکرد حالت دائم بهتر مهمترین مشخصه الگوریتم‌های پیشنهادی است.

واژگان کلیدی: شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم، سیگنال تنک، توپولوژی افزایشی دوجهته، دریافت فشرده، الگوریتم بازسازی.

Distributed and Cooperative Compressive Sensing Recovery Algorithm for Wireless Sensor Networks with Bi-directional Incremental Topology

Ghanbar Azarnia*[1], Mohammad Ali Tinati[2] & Tohid Yousefi Rezaii[3]

[1]Engineering Faculty of Khoy, Urmia University, Urmia, Iran

[2, 3]Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran,

Abstract

Recently, the problem of compressive sensing (CS) has attracted lots of attention in the area of signal processing. So, much of the research in this field is being carried out in this issue. One of the applications where CS could be used is wireless sensor networks (WSNs). The structure of WSNs consists of many low power wireless sensors. This requires that any improved algorithm for this application must be optimized in terms of energy consumption. In other words, the computational complexity of algorithms must be as low as possible and should require minimal interaction between the sensors. For such networks, CS has been used in data gathering and data persistence scenario, in order to minimize the total number of transmissions and consequently minimize the network energy consumption and to save the storage by distributing the traffic load and storage throughout the network. In these applications, the compression stage of CS is performed in sensor nodes, whereas the recovering duty is done in the fusion center (FC) unit in a centralized manner. In some applications, there is no FC unit and the recovering duty must be performed in sensor nodes in a cooperative and distributed manner which we have focused on in this paper. Indeed, the notable algorithm for this

* نویسندهٔ عهده‌دار مکاتبات

* Corresponding author

●تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۳/۱۱ ●تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۵/۲۸ ●تاریخ انتشار: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷ ●نوع مطالعه: پژوهشی

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

purpose is distributed least absolute shrinkage and selection operation (D-LASSO) algorithm which is based on diffusion cooperation structure. This algorithm that compete to the state-of-the-art CS algorithms has a major disadvantage; it involves matrix inversion that may be computationally demanding for sufficiently large matrices. On this basis, in this paper, we have proposed a distributed CS recovery algorithm for the WSNs with a bi-directional incremental mode of cooperation. Actually, we have proposed a comprehensive distributed framework for the recovery of sparse signals in WSNs. Here, we applied this comprehensive structure to three problems with different constraints which results in three completely distributed solutions named as distributed bi-directional incremental basis pursuit (DBIBP), distributed bi-directional incremental noise-aware basis pursuit (DBINBP) and distributed bi-directional incremental regularized least squares (DBIRLS). The proposed algorithms solely involve linear combinations of vectors and soft thresholding operations. Hence, the computational load is significantly reduced in each sensor. In the proposed method each iteration consists of two phases; clockwise and anti-clockwise phases. At each iteration, in anti-clockwise phase, each node receives the local estimate from its previous neighbor and updates an auxiliary variable. Then in the clockwise phase, each node receives the updated auxiliary variable from its next neighbors to update the local estimate. On the other hand, information exchange in two directions in an incremental manner which we called it bi-directional incremental structure. In an incremental strategy, information flows in a sequential manner from one node to the adjacent node. Unlike the diffusion structure (like as D-LASSO) where each node communicates with all of their neighbors, the incremental mode of cooperation requires the least amount of communication and power. The low computational complexity and better steady state performance are the important features of the proposed methods.

Keywords: Wireless sensor networks, Sparse signal, Bi-directional incremental topology, Compressive sensing, Recovery algorithm.

۱- مقدمه

در بیش‌تر کاربردهای عملی با مسألهٔ استنتاج کمیت‌های مورد نظر از اطلاعات اندازه‌گیری‌شده مواجه هستیم که در آن فرآیند کسب اطلاعات خطی بوده و درنتیجه مسأله به حل یک دستگاه معادلات خطی کاهش می‌یابد. به زبان ریاضی، داده مشاهده شده $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{m}$ (که داده، اطلاعات اندازه‌گیری شده، نگاشت داده، نگاشت‌های تصادفی یا نمونه‌های فشرده نیز نامیده می‌شود) از طریق مدل زیر به سیگنال مطلوب $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N}$ مرتبط می‌شود:

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y} \qquad (۱)$$

که در آن ماتریس $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times N}$ فرآیند اندازه‌گیری خطی را مدل کرده و ماتریس اندازه‌گیری، ماتریس نگاشت از سیگنال اولیهٔ N نمونه‌ای به سیگنال m نمونه‌ای یا sensing matrix نامیده می‌شود. در کاربردهای دریافت فشرده برای جمع‌آوری داده در شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم، همچنین این ماتریس routing matrix و گاهی sample schedule matrix نامیده می‌شود. به‌منظور بازیابی بردار $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N}$ می‌بایست معادلهٔ (۱) حل شود. پیشنهاد علم کلاسیک برای حل این مسأله آن است که تعداد اندازه‌گیری‌های m، می‌بایست دست‌کم با طول N سیگنال (تعداد مؤلفه‌های $\boldsymbol{x}$) برابر باشد. این حقیقت همچنین به قضیهٔ نمونه‌برداری شانون مرتبط می‌شود. بر طبق این قضیه نرخ نمونه‌برداری سیگنال زمان پیوسته می‌بایست دست‌کم دو برابر بیشینه فرکانس آن باشد تا بازسازی را تضمین کند. درحقیقت، اگر $m<N$ باشد، آن‌گاه جبر کلاسیک خطی بیان می‌دارد که سیستم خطی (۱) فرومعین بوده و لذا بی‌نهایت جواب برای این معادله وجود خواهد داشت. به‌عبارت دیگر، بدون اطلاعات اضافی‌تر، بازسازی $\boldsymbol{x}$ از $\boldsymbol{y}$ برای حالت $m<N$ ناممکن خواهد بود [1].

تحت فرضیات به‌خصوصی این امکان وجود خواهد داشت که بتوان زمانی که تعداد m اندازه‌گیری‌ها کمتر از طول N سیگنال است، سیگنال را بازسازی کرد. فرض اساسی که این امر را ممکن می‌سازد، تنک‌بودن است. حوزهٔ پژوهشی مرتبط با این زمینه تحت عناوین دریافت فشرده، دریافت فشرده‌شده، نمونه‌برداری فشرده یا بازیابی تنک شناخته می‌شود [2-3].

یک سیگنال تنک نامیده می‌شود اگر بیش‌تر مؤلفه‌های آن برابر صفر باشد. به بیان دقیق‌تر، یک سیگنال s-تنک نامیده می‌شود، اگر بیش‌تر s ضریب غیر صفر داشته باشد.

در شرایط واقعی‌تر، اندازه‌گیری سیگنال $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N}$ با دقت نامحدود قابل تصور نیست. این بدان معناست که بردار اندازه‌گیری $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{m}$ تنها تقریبی از بردار $\boldsymbol{Ax}\in\mathbb{R}^{m}$ است. به‌عبارت دیگر:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{e} \qquad (۲)$$

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

که در آن خطای اندازه‌گیری $\boldsymbol{e}\in\mathbb{R}^m$ توسط $\|\boldsymbol{e}\|<\sigma$، $\sigma\geq 0$ با نرمی در $\mathbb{R}^m$ (به‌طورمعمول نرم ℓ_2)، تخمین زده می‌شود.

هدف طراحی دریافت فشرده آن است که با استفاده از کمینه نرخ نمونه‌برداری، سیگنال اصلی را نسبت به کیفیت بازسازی مورد نظر بازیابی کند. برای این منظور شاید نخستین الگوریتمی که به ذهن خطور کند، الگوریتم $\ell_1-Minimization$ باشد:

$$\underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N}{minimize}\|\boldsymbol{z}\|_0 \quad subject\ \ to\ \ \boldsymbol{Az}=\boldsymbol{y} \qquad (۳)$$

که در آن نماد $\|\boldsymbol{z}\|_0$ تعداد مؤلفه‌های غیر صفر بردار $\boldsymbol{z}$ را نشان می‌دهد. به‌عبارت دیگر به‌دنبال تنک‌ترین برداری هستیم که با دادهٔ اندازه‌گیری‌شده $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$ سازگار باشد. اما متأسفانه این الگوریتم در حالت کلی NP-hard است [4]. برای مقاصد عملی وجود الگوریتم‌های بازسازی به‌طور منطقی سریع ضروری و این ویژگی توجه زیادی را در زمینه دریافت فشرده به خود جلب کرده است. درعمل مسألهٔ (۳) با نسخهٔ محدب‌شدهٔ [5] جایگزین می‌شود. این قاعده به‌طورمعمول تعقیب بنیان یا الگوریتم $\ell_1-Minimization$ نامیده می‌شود:

$$\underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N}{minimize}\|\boldsymbol{z}\|_1 \quad subject\ \ to\ \ \boldsymbol{Az}=\boldsymbol{y} \qquad (۴)$$

با لحاظ‌کردن خطای اندازه‌گیری، (۴) به‌صورت زیر که $\ell_1-Minimization$ آگاه از نویز یا تعقیب بنیان با قید درجه دوم نامیده می‌شود [6] و یا به فرم لاگرانژین آن که LASSO نامیده می‌شود [7] تعمیم می‌یابد که در آن $\lambda>0$ پارامتر ثابتی است:

$$\underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N}{minimize}\|\boldsymbol{z}\|_1 \quad subject\ \ to\ \ \|\boldsymbol{Az}-\boldsymbol{y}\|_2<\sigma \qquad (۵)$$

$$\underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N}{minimize}\,\lambda\|\boldsymbol{z}\|_1+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{Az}-\boldsymbol{y}\|_2^2 \qquad (۶)$$

دریافت یا نمونه‌برداری فشرده کاربردهای متعددی دارد و به‌طور کلی می‌تواند در هر بخشی از پردازش سیگنال که با سیگنال‌های تنک یا فشرده‌شدنی مواجه هستیم به کار رود. از بین همه این کاربردهای ممکن، در اینجا ما تنها به کاربرد آن در شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم (WSNs) متمرکز می‌شویم. امروزه از این شبکه‌ها در کاربردهای بسیاری استفاده می‌شود، طیف گسترده‌ای از کاربردهای شبکه‌های حس‌گری برای چندین حوزه پیش‌بینی شده است. از جمله این کاربردها عبارتند از: نظارت جغرافیایی (به‌عنوان نمونه، نظارت بر زیستگاه‌های حیوانات و کشاورزی دقیق)، کنترل صنعتی (به‌عنوان نمونه، در یک نیروگاه و یا یک زیردریایی)، مدیریت کسب و کار (مانند، ردیابی موجودی با علامت‌های شناسایی فرکانس رادیویی)، امنیت کشور (ردیابی و طبقه‌بندی اهداف متحرک) و مراقبت‌های بهداشتی (مانند نظارت بر بیمار و تحویل داروی شخصی) [8]. اگرچه شباهت‌هایی بین شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم با سایر شبکه‌های بی‌سیم وجود دارد با این حال شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم دارای ویژگی‌های خاصی هستند که طراحی الگوریتم‌های مرتبط با آنها را با چالش جدی مواجه می‌سازد از جملهٔ این ویژگی‌ها عمر محدود حس‌گرها است. استفاده از باطری غیر قابل شارژ برای تغذیهٔ حس‌گرها سبب محدودشدن طول عمر حس‌گر و لذا طول عمر کل شبکهٔ حس‌گری می‌شود. به‌علاوه، نرخ بالای دادهٔ جمع‌آوری‌شده دسترسی پهنای باند را با محدودیت روبه‌رو می‌سازد. این دو مسأله محدودیت جدی بر روی پیچیدگی الگوریتم‌های مرتبط با شبکه‌های حس‌گری اعمال می‌کنند [9-10]. هر چند که تئوری دریافت فشرده برای سیگنال‌های منفرد به‌خوبی ارتقا یافته است، اما کاربردهای حس توزیع‌شده سیگنال‌های چندگانه را شامل می‌شود که برای آن‌ها پیشرفت کمی صورت گرفته است.

در برخی از شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم واحدی به نام پردازش‌گر مرکزی (FC) وجود دارد. در این شبکه‌ها، گره‌های حس‌گری موجود در شبکه مشاهدات را گردآوری و آن‌ها را برای پردازش به این واحد مرکزی ارسال و پردازش‌گر مرکزی عمل پردازش مورد نیاز را اجرا و سپس نتایج را به تک‌تک گره‌ها پخش می‌کند. این نوع عملکرد نیازمند یک پردازش‌گر مرکزی قوی به همراه میزان وسیعی از ارتباطات بین گره‌ها و پردازش‌گر است. دریافت فشرده در این نوع از شبکه‌ها در کاربردهایی نظیر جمع‌آوری داده [11-22] و ثبات داده [23-27] به میزان قابل توجهی مورد توجه قرار گرفته است. عمده هدف از کاربرد دریافت فشرده در این موارد کاهش میزان تبادلات داده و یا کاهش حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی داده است.

اما چنانچه پردازش‌های لازم در یک شبکهٔ حس‌گری بی‌سیم، به‌صورت مشارکتی و توزیع‌شده و بدون نیاز به حضور یک پردازنده مرکزی قوی صورت گیرد، میزان پردازش‌ها و ارتباطات به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاسته می‌شود [28-29].

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

خوشبختانه در همین اواخر دریافت فشرده با چنین پردازش‌های توزیع‌شده‌ای نیز مورد توجه قرار گرفته است [30-32]. هر کدام از روش‌های [30-32] مدل‌های به‌خصوصی برای دادهٔ مورد بازسازی در نظر گرفته‌اند. اما، یکی از مدل‌های مناسبی که می‌تواند کاربرد وسیعی در شبکه‌های حس‌گری داشته باشد، مدل در نظر گرفته‌شده در [33] است. در این مدل گره‌های حس‌گری به‌دنبال بازسازی بردار تنک یکسان به‌صورت توزیع‌شده و مشارکتی هستند.

در [33] به‌منظور تخمین ضرایب تنک سه الگوریتم توزیع‌شده بر اساس LASSO و با مشارکت تمام گره‌ها ارائه شده است؛ نخست الگوریتم distributed quadratic programming LASSO یا به‌اختصار DQP-LASSO مطرح شده است. این الگوریتم در هر تکرار نیازمند حل یک quadratic programming (QP) است که خود می‌تواند به‌صورت تکراری و با استفاده از روال‌های بهینه‌سازی استاندارد برای QP نظیر second order cone programming یا coordinate descent و یا الگوریتم‌های sub gradient حل شود؛ لذا، نیازمند محاسبات سنگینی بوده و تنها زمانی کارا خواهد بود که گره‌ها توان محاسباتی کافی داشته باشند؛ که در کاربردهای تخمین توزیع‌شده با استفاده از حس‌گرها شدنی نیست؛ لذا، الگوریتم distributed coordinate descent LASSO (DCD-LASSO) مبتنی بر cyclic coordinate به‌منظور کاهش پیچیدگی در [33] ارائه شده است؛ اما این الگوریتم نیز از مشکل‌های دیگری رنج می‌برد. از جمله معایب این روش پایین‌بودن سرعت هم‌گرایی و نیز لزوم انتخاب دقیق پارامتر ضریب گام به‌منظور تحقق هم‌گرایی است. برای رفع این مشکل، درنهایت [33] الگوریتم D-LASSO (distributed LASSO) را پیشنهاد داده است. اگرچه این الگوریتم همگرایی سریع‌تر را برای تمام مقادیر ضریب گام فراهم می‌آورد، با این همه، نیازمند محاسبه ماتریس معکوسی به‌ازای هر گره است. محاسبه این ماتریس معکوس می‌تواند برای مقادیر به‌اندازهٔ کافی بزرگ بعد بردار ضرایب تحت تخمین، به‌لحاظ محاسباتی طاقت‌فرسا باشد.

ما نیز در این مقاله، همان مدل منظورشده در [33] را برای دادهٔ تنکی که قرار است به‌صورت توزیع‌شده و با مشارکت تمام گره‌های شبکه بازسازی شود، لحاظ کرده‌ایم؛ اما، شیوه‌ی پیشنهادی ما عملکرد بازسازی بهتری نسبت به D-LASSO داشته و در عین حال معایب الگوریتم D-LASSO نظیر نیاز به محاسبه ماتریس وارون را نخواهد داشت. همچنین، الگوریتم پیشنهادی ما مبتنی بر توپولوژی مشارکتی افزایشی است که در آن هر گره تنها با یک گره همسایه نیازمند مبادله داده است؛ لذا، در مقایسه با توپولوژی مشارکتی نفوذی [33] که در آن هر گره با تمام گره‌های همسایه به مبادله داده می‌پردازد، شیوه‌ی پیشنهادی به میزان قابل توجهی مصرف انرژی پایین‌تری داشته و حال آنکه برطبق نتایج شبیه‌سازی‌ها عملکرد به‌مراتب بهتری نسبت به [33] خواهد داشت.

۲- مسأله دریافت فشرده در شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم

شبکه‌ای متشکل از J حس‌گر را در نظر می‌گیریم که در آن حس‌گرها در یک مد مشارکتی افزایشی با همدیگر به تبادل اطلاعات می‌پردازند. در یک مد مشارکتی افزایشی، اطلاعات به شیوه‌ای ترتیبی از یک گره به گره همسایه جریان می‌یابد. این نوع عملکرد نیازمند الگوی مشارکتی چرخه‌ای بین گره‌ها بوده و به کمترین میزان ارتباطات و توان نیازمند است. هدف آن است که حس‌گرها با مشارکت یکدیگر به بازسازی سیگنال s-تنک $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$ بپردازند. به همین منظور، هر حس‌گر از بردار اندازه‌گیری دریافت‌شده توسط خود و ماتریس مشخص $\boldsymbol{A}_i\in\mathbb{R}^{m\times N}$ بهره می‌گیرد. در (۷) بردار $\boldsymbol{e}_i\in\mathbb{R}^m$ خطای اندازه‌گیری حس‌گر i ام با $\|\boldsymbol{e}_i\|<\sigma_i$ را نشان می‌دهد.

$$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i\in\mathbb{R}^m \qquad (۷)$$

۳- پیشنهاد چهارچوب جامع برای بازسازی سیگنال‌های تنک در شبکه‌های حس‌گری با توپولوژی افزایشی

مسأله بهینه‌سازی کلی زیر را برای یک شبکه حس‌گری بی‌سیم شامل J گره در نظر می‌گیریم:

$$\min_{\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{J}\left[G(\boldsymbol{x}_i)+F(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i)+H(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_{i-1})\right] \qquad (۸)$$

که در آن $\boldsymbol{A}_i\in\mathbb{R}^{m\times N}$ و $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^N$ بوده، $G:\mathbb{R}^N\to(-\infty,\infty]$ و $F,H:\mathbb{R}^m\to(-\infty,\infty]$ توابع تعمیم‌یافته محدب، شبه پیوسته و حقیقی مقدار هستند. در ادامه خواهیم دید که

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

چگونه عبارت‌های $G(x_i)$، $F(A_i x_i)$ و $H(A_i x_{i-1})$ به‌ترتیب تنکی، قید مسأله بهینه‌سازی و مشارکت بین هر گره و همسایه آن را مدل می‌کنند. در (۸) متغیر محلی x_i می‌تواند به‌عنوان تخمینی برای x در گره i-ام در نظر گرفته شده و متغیر x_{i-1} تخمین محلی دریافتی از همسایه قبلی گره i باشد. در اینجا فرض شده است که $x_0 = x_J$. مسأله (۸) را به‌صورت مسأله مقید زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\min_{x_i \in \mathbb{R}^N, z_i, u_{i-1} \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{J} \left[G(x_i) + F(z_i) + H(u_{i-1}) \right] \quad \text{subject to } z_i = A_i x_i, \quad u_{i-1} = A_i x_{i-1} \tag{۹}$$

تابع لاگرانژین این مسأله عبارت خواهد بود از:

$$L(x_i, z_i, \xi_i, u_{i-1}, \upsilon_i, i = 1,2,\dots,J) = \sum_{i=1}^{J} \begin{bmatrix} G(x_i) + F(z_i) + Re\langle A_i^* \xi_i, x_i \rangle - Re\langle \xi_i, z_i \rangle \\ + H(u_{i-1}) + Re\langle A_i^* \upsilon_i, x_{i-1} \rangle - Re\langle \upsilon_i, u_{i-1} \rangle \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

مقدار تابع لاگرانژ در نقاط بهینه آن، مقدار بهینه مسأله زیر است:

$$\min_{x_i \in \mathbb{R}^N, z_i, u_{i-1} \in \mathbb{R}^m} \max_{\xi_i, \upsilon_i \in \mathbb{R}^m} L = \min_{x_i \in \mathbb{R}^N} \max_{\xi_i, \upsilon_i \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{J} \begin{bmatrix} -\max_{z_i \in \mathbb{R}^m} \left(Re\langle \xi_i, z_i \rangle - F(z_i) \right) - \\ \max_{u_{i-1} \in \mathbb{R}^m} \left(Re\langle \upsilon_i, u_{i-1} \rangle - H(u_{i-1}) \right) \\ + G(x_i) + Re\langle A_i^* \xi_i, x_i \rangle + Re\langle A_i^* \upsilon_i, x_{i-1} \rangle \end{bmatrix}$$
$$= \min_{x_i \in \mathbb{R}^N} \max_{\xi_i, \upsilon_i \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{J} \begin{bmatrix} G(x_i) + Re\langle A_i^* \xi_i, x_i \rangle + Re\langle A_i^* \upsilon_i, x_{i-1} \rangle \\ -F^*(\xi_i) - H^*(\upsilon_i) \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

در این رابطه، برابری دوم را با توجه به ویژگی saddle point و برابری سوم را با استفاده از convex conjugate تعریف شده به‌صورت:

$$F^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left\{ Re\langle x, y \rangle - F(x) \right\} \tag{۱۲}$$

نوشته‌ایم. حال الگوریتمی برای حل مسأله (۸) تحت عنوان قضیه زیر ارائه می‌دهیم.

قضیه: نقطه $(x_i^\#, \xi_i^\#, \upsilon_i^\#)$ همان saddle point رابطه (۱۱)، یا به عبارتی همان نقطه بهینه (۸) است، اگر و فقط اگر، $(x_i^\#, \xi_i^\#, \upsilon_i^\#)$ نقطه ثابت تکرارهای زیر باشد:

$$\xi_i^{n+1} = P_{F^*}\left(\eta_i; \xi_i^n + \eta_i A_i \bar{x}_i^n \right) \tag{۱۳}$$

$$\upsilon_i^{n+1} = P_{H^*}\left(\gamma_i; \upsilon_i^n + \gamma_i A_i \bar{x}_{i-1}^n \right) \tag{۱۴}$$

$$x_i^{n+1} = P_G\left(\tau_i; x_i^n - \tau_i \left(A_i^* \xi_i^{n+1} + A_{i+1}^* \upsilon_{i+1}^{n+1} \right) \right) \tag{۱۵}$$

$$\bar{x}_i^{n+1} = x_i^{n+1} + \mu_i \left(x_i^{n+1} - x_i^n \right) \tag{۱۶}$$

که در آن $\eta_i, \gamma_i, \tau_i > 0$ و $\mu_i \in [0,1]$ پارامترهای ثابتی هستند.

در اینجا منظور ما از $P_G(\tau; z)$ همان proximal mapping تابع G تعریف شده به‌صورت

$$P_G(\tau; z) = \underset{x \in \mathbb{R}^N}{argmin} \left\{ \tau G(z) + \frac{1}{2} \| x - z \|_2^2 \right\} \tag{۱۷}$$

است. برای اثبات این قضیه از لم زیر بهره خواهیم گرفت:

لم (به‌عنوان نمونه به [34] مراجعه شود): فرض کنیم $F: \mathbb{R}^N \to (-\infty, \infty]$ یک تابع محدب است. در این صورت خواهیم داشت $x = P_F(z)$ اگر و فقط اگر $z \in x + \partial F(x)$، که در آن ∂F نشان‌دهنده subdifferential تابع F است.

۶

اثبات قضیه:

با اعمال لم بالا به (۱۳)-(۱۶) خواهیم داشت:

$$\xi_i^\# + \eta_i A_i x_i^\# \in \xi_i^\# + \eta_i \partial F^*(\xi_i^\#)$$
$$\upsilon_i^\# + \gamma_i A_i x_{i-1}^\# \in \upsilon_i^\# + \gamma_i \partial H^*(\upsilon_i^\#)$$
$$x_i^\# - \tau_i \left(A_i^* \xi_i^\# + A_{i+1}^* \upsilon_{i+1}^\# \right) \in x_i^\# + \tau_i \partial G(x_i^\#)$$

لذا داریم:

$$A_i x_i^\# \in \partial F^*(\xi_i^\#)$$
$$A_i x_{i-1}^\# \in \partial H^*(\upsilon_i^\#)$$
$$-\left(A_i^* \xi_i^\# + A_{i+1}^* \upsilon_{i+1}^\# \right) \in \partial G(x_i^\#)$$

که این معادل است با آنکه $\xi_i^\#$ بیشینه‌کننده

$$\sum_{i=1}^{J} \begin{bmatrix} G(x_i^\#) + Re\langle A_i^* \xi_i, x_i^\# \rangle + Re\langle A_i^* \upsilon_i^\#, x_{i-1}^\# \rangle \\ -F^*(\xi_i) - H^*(\upsilon_i^\#) \end{bmatrix}$$

و $\upsilon_i^\#$ بیشینه‌کننده

$$\sum_{i=1}^{J} \begin{bmatrix} G(x_i^\#) + Re\langle A_i^* \xi_i^\#, x_i^\# \rangle + Re\langle A_i^* \upsilon_i, x_{i-1}^\# \rangle \\ -F^*(\xi_i^\#) - H^*(\upsilon_i) \end{bmatrix}$$

و $x_i^\#$ کمینه‌کننده

$$\sum_{i=1}^{J} \begin{bmatrix} G(x_i) + Re\langle A_i^* \xi_i^\#, x_i \rangle + Re\langle A_i^* \upsilon_i^\#, x_{i-1} \rangle \\ -F^*(\xi_i^\#) - H^*(\upsilon_i^\#) \end{bmatrix}$$

هستند. این نتایج خود معادل‌اند با این‌که نقطه $(x_i^\#, \xi_i^\#, \upsilon_i^\#)$ همان saddle point رابطه (۱۱) است. با انجام اثبات بالا در جهت عکس نتیجه می‌شود که saddle point رابطه (۱۱) همان نقطه ثابت تکرارهای (۱۳)-(۱۶) است.

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

با توجه به اینکه شیوه پیشنهادی یک الگوریتم بازگشتی primal–dual است، با توجه به [3] و [34] به‌ازای پارامترهای ثابت η_i, γ_i و τ_i هر چه نرم ماتریس $\|A\|_{2\to2}$ کوچک‌تر باشد، یا برعکس به‌ازای $\|A\|_{2\to2}$ ثابت کوچک‌تربودن پارامترها، همگرایی این الگوریتم را تضمین خواهد کرد.

تکرارهای پیشنهادی (۱۳)-(۱۶) در یک چهارچوب جامع ارائه شده‌اند. به این معنا که در آن توابع F، H و G هر تابع تعمیم‌یافته، محدب، شبه پیوسته و حقیقی مقدار می‌توانند باشند. در ادامه خواهیم دید که این شیوه پیشنهادی را چگونه می‌توان به (۴)، (۵) و (۶) اعمال کرد.

۳-۱- الگوریتم تعقیب پایه توزیع‌شده افزایشی دوجهته

به‌منظور بازسازی بردار s-تنک $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$ از اندازه‌گیری‌های آن در (۷) مسأله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{for all } i\in\{1,2,\dots,J\} \qquad (۱۸)$$
$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_i$$

برای آن‌که بتوان (۱۸) را به‌صورت توزیع شده بیان کرد، متغیر عمومی $\boldsymbol{x}$ را با متغیر محلی $\boldsymbol{x}_i$ جایگزین می‌کنیم:

$$\text{for all } i\in\{1,2,\dots,J\} \qquad (۱۹)$$
$$\underset{\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}}\|\boldsymbol{x}_i\|_1 \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i \text{ and } \boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_{i-1}$$

قید $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_{i-1}$ در حقیقت شرط برابری تخمین هر گره با گره قبلی و در نتیجه با توجه به توپولوژی افزایشی شبکه شرط برابری تخمین‌های تمام گره‌های شبکه را برآورده می‌کند.

برای فرمول‌بندی این مسأله در قالب (۸) طرفین $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_{i-1}$ را در $\boldsymbol{A}_i$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\text{for all } i\in\{1,2,\dots,J\} \quad \underset{\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}}\|\boldsymbol{x}_i\|_1 \qquad (۲۰)$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i \text{ and } \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_{i-1}=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i$$

این مسأله معادل است با (۸) که در آن $G(\boldsymbol{x}_i)=\|\boldsymbol{x}_i\|_1$ و $H(\boldsymbol{u}_{i-1})=\chi_{\{\boldsymbol{y}_i\}}(\boldsymbol{u}_{i-1})=\begin{cases}0 & \text{if } \boldsymbol{u}_{i-1}=\boldsymbol{y}_i\\ \infty & \text{if } \boldsymbol{u}_{i-1}\neq\boldsymbol{y}_i\end{cases}$ بوده با $\chi_K(z)$ نشان‌دهنده تابع مشخصه مجموعه K و $F(\boldsymbol{z}_i)=\chi_{\{\boldsymbol{y}_i\}}(\boldsymbol{z}_i)=\begin{cases}0 & \text{if } \boldsymbol{z}_i=\boldsymbol{y}_i\\ \infty & \text{if } \boldsymbol{z}_i\neq\boldsymbol{y}_i\end{cases}$ است.

بنابراین، بیشینه‌کننده (۲۰) می‌تواند به‌وسیلهٔ تکرارهای (۱۳)-(۱۶) حاصل شود. برای این منظور می‌بایست نخست proximal mapping تابع‌های F^*، G و H^* حساب شوند. می‌توان نشان داد که proximal mapping تابع G عبارت است از:

$$\left(P_G(\tau_i;\boldsymbol{z})\right)_\ell=\left(S_{\tau_i}(\boldsymbol{z})\right)_\ell=S_{\tau_i}(\boldsymbol{z}_\ell) \qquad (۲۱)$$

که در آن $S_{\tau_i}(\boldsymbol{z}_\ell)$ که اپراتور soft thresholding نامیده می‌شود، دارای ضابطه‌ای به‌صورت زیر است:

$$S_{\tau_i}(\boldsymbol{z}_\ell)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\boldsymbol{z}_\ell)\left(|\boldsymbol{z}_\ell|-\tau_i\right) & \text{if } |\boldsymbol{z}_\ell|\geq\tau_i\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۲۲)$$

در اینجا $\operatorname{sgn}(\boldsymbol{z}_\ell)=\boldsymbol{z}_\ell/|\boldsymbol{z}_\ell|$ نشان‌دهنده تابع علامت است.

به‌منظور محاسبه proximal mapping تابع F^* از رابطه زیر (که به‌عنوان نمونه در [34] به آن اشاره شده است) بهره می‌گیریم:

$$P_F(\tau;\boldsymbol{z})+\tau P_{F^*}\left(\tau^{-1};\boldsymbol{z}/\tau\right)=\boldsymbol{z} \qquad (۲۳)$$

لذا، کافی است که نخست proximal mapping تابع F حساب شود:

$$P_F(\eta_i;\boldsymbol{\xi})=\underset{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}}\left\{\eta_i F(\boldsymbol{z})+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\xi}\|_2^2\right\} \qquad (۲۴)$$
$$\underset{\boldsymbol{z}=\{\boldsymbol{y}_i\}}{\operatorname{argmin}}\left\{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\xi}\|_2\right\}=\boldsymbol{y}_i$$

از (۲۳) و (۲۴) نتیجه می‌شود که:

$$P_{F^*}(\eta_i,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}-\eta_i\boldsymbol{y}_i \qquad (۲۵)$$

به‌طور مشابه برای H^* داریم:

$$P_{H^*}(\gamma_i,\boldsymbol{\upsilon})=\boldsymbol{\upsilon}-\gamma_i\boldsymbol{y}_i \qquad (۲۶)$$

از جاگذاری (۲۱)، (۲۵) و (۲۶) در (۱۳)-(۱۶) خواهیم داشت:

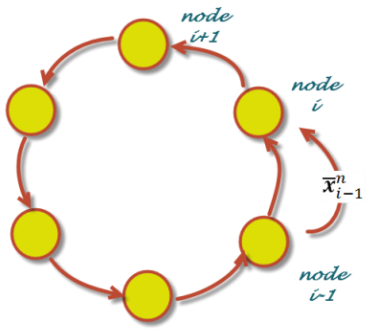
$$\boldsymbol{\xi}_i^{n+1}=\boldsymbol{\xi}_i^n+\eta_i\left(\boldsymbol{A}_i\bar{\boldsymbol{x}}_i^n-\boldsymbol{y}_i\right) \qquad (۲۷)$$
$$\boldsymbol{\upsilon}_i^{n+1}=\boldsymbol{\upsilon}_i^n+\gamma_i\left(\boldsymbol{A}_i\bar{\boldsymbol{x}}_{i-1}^n-\boldsymbol{y}_i\right) \qquad (۲۸)$$
$$\boldsymbol{x}_i^{n+1}=S_{\tau_i}\left(\boldsymbol{x}_i^n-\tau_i\left(\boldsymbol{A}_i^*\boldsymbol{\xi}_i^{n+1}+\boldsymbol{A}_{i+1}^*\boldsymbol{\upsilon}_{i+1}^{n+1}\right)\right) \qquad (۲۹)$$
$$\bar{\boldsymbol{x}}_i^{n+1}=\boldsymbol{x}_i^{n+1}+\mu_i\left(\boldsymbol{x}_i^{n+1}-\boldsymbol{x}_i^n\right) \qquad (۳۰)$$

با ضرب طرفین (۲۸) در $\boldsymbol{A}_i^*$ و با تعریف $\boldsymbol{\omega}_i^n=\boldsymbol{A}_i^*\boldsymbol{\upsilon}_i^n$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\xi}_i^{n+1}=\boldsymbol{\xi}_i^n+\eta_i\left(\boldsymbol{A}_i\bar{\boldsymbol{x}}_i^n-\boldsymbol{y}_i\right) \qquad (۳۱)$$
$$\boldsymbol{\omega}_i^{n+1}=\boldsymbol{\omega}_i^n+\gamma_i\boldsymbol{A}_i^*\left(\boldsymbol{A}_i\bar{\boldsymbol{x}}_{i-1}^n-\boldsymbol{y}_i\right) \qquad (۳۲)$$
$$\boldsymbol{x}_i^{n+1}=S_{\tau_i}\left(\boldsymbol{x}_i^n-\tau_i\left(\boldsymbol{A}_i^*\boldsymbol{\xi}_i^{n+1}+\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{n+1}\right)\right) \qquad (۳۳)$$
$$\bar{\boldsymbol{x}}_i^{n+1}=\boldsymbol{x}_i^{n+1}+\mu_i\left(\boldsymbol{x}_i^{n+1}-\boldsymbol{x}_i^n\right) \qquad (۳۴)$$

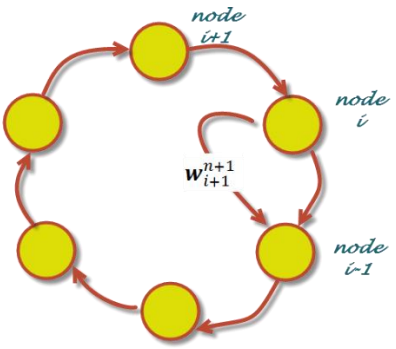
این الگوریتم را تعقیب پایه توزیع‌شده افزایشی دوجهته یا Distributed Bi-directional Incremental Basis Pursuit (DBIBP) می‌نامیم. عملکرد این الگوریتم به‌صورت زیر است:

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]



(شکل-۱): فاز پاد ساعتگرد شبکه

(Figure-1): Anti-clockwise Phase of the network



(شکل-۲): فاز ساعتگرد شبکه

(Figure-2): Clockwise Phase of the network

در الگوریتم پیشنهادی هر تکرار شامل دو فاز است، فاز ساعت‌گرد و فاز پادساعت‌گرد. در هر تکرار نخست در فاز پادساعت‌گرد هر گره مطابق شکل (۱) دادهٔ تخمین زده‌شده به‌وسیلهٔ گره ماقبل خود در تکرار قبلی یعنی $\bar{x}_{i-1}^{n}$ را دریافت کرده و تخمین میانی ω_i^{n+1} را به‌هنگام می‌کند. سپس در فاز ساعت‌گرد مطابق شکل (۲) هر گره تخمین به‌هنگام‌شدهٔ ω_{i+1}^{n+1} را از گره مابعد خود گرفته و با به‌هنگام‌رسانی ξ_i^{n+1}، بردار x_i^{n+1} و درنهایت $\bar{x}_i^{n+1}$ را به‌هنگام می‌کند؛ سپس تکرار بعدی آغاز می‌شود. این تکرارها تا حصول هم‌گرایی همچنان ادامه خواهند یافت.

۳-۲- الگوریتم تعقیب پایه آگاه از نوفه توزیع‌شده و افزایشی دوجهته پیشنهادی

حال مسأله بهینه‌سازی (۵) را در ساختار شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\text{for all } \ i \in \{1,2,\dots,J\} \\ &\underset{x\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A_i x - y_i\|_2 \le \sigma_i \end{aligned} \tag{۳۵}$$

دوباره به‌منظور بیان این مسأله به‌صورت توزیع‌شده و مشابه با چهارچوب کلی (۸)، متغیر عمومی x را با متغیر محلی x_i جای‌گذاری کرده و قید $x_i = x_{i-1}$ یا $A_i x_i = A_i x_{i-1}$ را نیز در آن می‌گنجانیم؛ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\text{for all } \ i \in \{1,2,\dots,J\} \quad \underset{x_i\in\mathbb{R}^N}{\text{minimize}} \|x_i\|_1 \\ &\text{s.t.} \quad \|A_i x_i - y_i\|_2 \le \sigma_i \ \text{ and } \ A_i x_i = A_i x_{i-1} \end{aligned} \tag{۳۶}$$

این مسأله معادل است با (۸) و درنتیجه با (۹) که در آن $G(x_i) = \|x_i\|_1$، $H(u_{i-1}) = \chi_{\{y_i\}}(u_{i-1})$ و $F(z_i) = \chi_{B(y_i,\sigma_i)}(z_i)$ هستند. در اینجا $B(y_i,\sigma_i) = \{z \in \mathbb{R}^m, \|z - y_i\|_2 \le \sigma_i\}$ کره‌ای است به شعاع σ_i و به مرکزیت y_i. برای توابع G و H، proximal mapping همان روابط (۲۱) و (۲۶) هستند. اما، در مورد F داریم:

$$\begin{aligned} P_F(\eta_i;\xi) &= \underset{z\in\mathbb{R}^m}{\text{argmin}} \left\{ \eta_i F(z) + \frac{1}{2}\|z - \xi\|_2^2 \right\} \\ &= \underset{z:\|z-y_i\|_2 \le \sigma_i}{\text{argmin}} \left\{ \|z - \xi\|_2 \right\} = \begin{cases} \xi & \text{if } \ \|\xi - y_i\|_2 \le \sigma_i \\ y_i + \dfrac{\sigma_i}{\|\xi - y_i\|_2}(\xi - y_i) & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \tag{۳۷}$$

که با جای‌گذاری آن در (۲۳) خواهیم داشت:

$$P_{F^*}(\eta_i;\xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ \|\xi - \eta_i y_i\|_2 \le \sigma_i \eta_i \\ \left(1 - \dfrac{\sigma_i \eta_i}{\|\xi - \eta_i y_i\|_2}\right)(\xi - \eta_i y_i) & \text{o.w.} \end{cases} \tag{۳۸}$$

حال با جای‌گذاری (۲۱)، (۲۶) و (۳۸) در (۱۳)-(۱۶) و با تعریف $\omega_i^n = A_i^* \upsilon_i^n$ خواهیم داشت:

$$\xi_i^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ \left\|\eta_i^{-1}\xi_i^n + A_i \bar{x}_i^n - y_i\right\|_2 \le \sigma_i \\ \left(1 - \dfrac{\sigma_i \eta_i}{\left\|\xi_i^n + \eta_i\left(A_i \bar{x}_i^n - y_i\right)\right\|_2}\right)\left(\xi_i^n + \eta_i\left(A_i \bar{x}_i^n - y_i\right)\right) & \text{o.w.} \end{cases} \tag{۱}$$

$$\omega_i^{n+1} = \omega_i^n + \gamma_i A_i^*\left(A_i \bar{x}_{i-1}^n - y_i\right) \tag{۴۰}$$

$$x_i^{n+1} = S_{\tau_i}\left(x_i^n - \tau_i\left(A_i^* \xi_i^{n+1} + \omega_{i+1}^{n+1}\right)\right) \tag{۴۱}$$

$$\bar{x}_i^{n+1} = x_i^{n+1} + \mu_i\left(x_i^{n+1} - x_i^n\right) \tag{۴۲}$$

این الگوریتم را تعقیب پایه آگاه از نوفه توزیع‌شده و افزایشی دوجهته یا Distributed Bi-directional Incremental Noise-aware Basis Pursuit (DBINBP) می‌نامیم.

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

۳-۳- الگوریتم کمینه مربعات قابل تنظیم توزیع‌شده و افزایشی دوجهته

حال مسأله بهینه‌سازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{for all } i \in \{1,2,\ldots,J\} \qquad (۴۳)$$
$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N}{minimize} \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{\delta_i}{2}\|\mathbf{A}_i\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\|_2^2$$

که در آن $\delta_i > 0$ پارامتر تنظیم است. با انتخاب $\lambda_i = \delta_i^{-1}$ این مسأله همان مسأله LASSO داده شده در (۶) خواهد بود.

(جدول-۱): پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌های پیشنهادی

(Table-1): The computational complexity of the proposed algorithms

	تعداد ضرب	تعداد جمع	تعداد تفاضل	تعداد تقسیم	تعداد عملگر soft thresholding	اپراتور ℓ_2 − norm بردار $m \times 1$	عملگر شرطی (if-else)
DBIBP	4mN+3N+m	4mN+N-m	2(m+N)	-	1	-	-
DBINBP	4mN+3N+2m+1	4mN+N-m	2(m+N)+1	1	1	1	1
DBIRLS	4mN+3N+2m	4mN+N-m+1	2(m+N)	1	1	-	-

دوباره به‌منظور بیان این مسأله به‌صورت توزیع‌شده و مشابه با چهارچوب کلی (۸)، متغیر عمومی $\mathbf{x}$ را با متغیر محلی x_i جای‌گذاری کرده و قید $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ یا $\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}_{i-1}$ را نیز در آن می‌گنجانیم؛ لذا، داریم:

$$\text{for all } i \in \{1,2,\ldots,J\} \qquad (۴۴)$$
$$\underset{\mathbf{x}_i\in\mathbb{R}^N}{minimize} \|\mathbf{x}_i\|_1 + \frac{\delta_i}{2}\|\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\|_2^2 \quad s.t.\ \mathbf{A}_i\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{y}_i$$

این مسأله معادل است با (۸) و درنتیجه با (۹) که در آن $G(\mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x}_i\|_1$، $H(\mathbf{u}_{i-1}) = \chi_{\{\mathbf{y}_i\}}(\mathbf{u}_{i-1})$ و $F(\mathbf{z}_i) = \frac{\delta_i}{2}\|\mathbf{z}_i - \mathbf{y}_i\|_2^2$ هستند. برای توابع G و H، proximal mapping همان روابط (۲۱) و (۲۶) است؛ اما، در مورد تابع F داریم:

$$P_F(\eta_i;\boldsymbol{\xi}) = \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m}{argmin}\left\{\eta_i F(\mathbf{z}) + \frac{1}{2}\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi}\|_2^2\right\} \qquad (۴۵)$$
$$= \underset{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m}{argmin}\left\{\frac{\eta_i\delta_i}{2}\|\mathbf{z} - \mathbf{y}_i\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi}\|_2^2\right\}$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\mathbf{z}$ و مساوی صفر قراردادن آن داریم:

$$\mathbf{z} = \frac{\eta_i\delta_i}{1+\eta_i\delta_i}\mathbf{y}_i + \frac{1}{1+\eta_i\delta_i}\boldsymbol{\xi} \qquad (۴۶)$$

از جای‌گذاری (۴۶) در (۴۵) خواهیم داشت:

$$P_F(\eta_i;\boldsymbol{\xi}) = \frac{\eta_i\delta_i}{1+\eta_i\delta_i}\mathbf{y}_i + \frac{1}{1+\eta_i\delta_i}\boldsymbol{\xi} \qquad (۴۷)$$

جای‌گذاری (۴۷) در (۲۳) نتیجه خواهد داد:

$$P_{F^*}(\eta_i;\boldsymbol{\xi}) = \frac{\delta_i}{\eta_i+\delta_i}(\boldsymbol{\xi} - \eta_i\mathbf{y}_i) \qquad (۴۸)$$

حال با جای‌گذاری (۲۱)، (۲۶) و (۴۸) در (۱۳)-(۱۶) با تعریف $\boldsymbol{\omega}_i^n = \mathbf{A}_i^*\mathbf{v}_i^n$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\xi}_i^{n+1} = \frac{\delta_i}{\eta_i+\delta_i}\left(\boldsymbol{\xi}_i^n + \eta_i\left(\mathbf{A}_i\overline{\mathbf{x}}_i^n - \mathbf{y}_i\right)\right) \qquad (۴۹)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^{n+1} = \boldsymbol{\omega}_i^n + \gamma_i\mathbf{A}_i^*\left(\mathbf{A}_i\overline{\mathbf{x}}_{i-1}^n - \mathbf{y}_i\right) \qquad (۵۰)$$

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = S_{\tau_i}\left(\mathbf{x}_i^n - \tau_i\left(\mathbf{A}_i^*\boldsymbol{\xi}_i^{n+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1}^{n+1}\right)\right) \qquad (۵۱)$$

$$\overline{\mathbf{x}}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^{n+1} + \mu_i\left(\mathbf{x}_i^{n+1} - \mathbf{x}_i^n\right) \qquad (۵۲)$$

این الگوریتم را کمینه مربعات قابل تنظیم توزیع‌شده و افزایشی دوجهته یا Distributed Bi-directional Incremental Regularized Least Squares (DBIRLS) می‌نامیم.

به‌منظور مقایسه، پیچیدگی‌های محاسباتی الگوریتم‌های پیشنهادی در جدول (۱) نشان داده شده است. همان‌طورکه ملاحضه می‌شود هر سه الگوریتم به‌طورتقریبی به تعداد عمل‌گر یکسانی نیاز دارند، جز این‌که الگوریتم DBINBP به عمل‌گرهای اضافی‌تر نرم و شرطی نیز نیاز دارد.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های الگوریتم پیشنهادی ارائه می‌شود. برای این منظور، شبکه‌ای با $J = 20$ گره حس‌گری در نظر گرفته شده است. همچنین پارامترها به‌صورت $N = 512$، $m = 128$، $s = 10$، $\mu_i = 1$، $\eta_i = 0.058$، $\gamma_i = \eta_i / 3$، $\tau_i = 9.2$ و $\delta_i = 50$ انتخاب شده‌اند. برای الگوریتم D-LASSO مقدار پارامترها بر اساس توصیه نویسندگان [33] طوری انتخاب شده‌اند که بهترین نتیجه حاصل شود. تمام نتایج با متوسط‌گیری در طول یکصد آزمایش مستقل از هم حاصل شده‌اند. در هر

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

آزمایش، ماتریس A_i نخست براساس توزیع $N\left(0,\frac{1}{m}\right)$ ایجاد شده و سپس ستون‌های آن نرمالیزه شده‌اند. به‌علاوه، ساپورت بردار تنک x در هر آزمایش به‌طور تصادفی و با توزیع یکنواخت انتخاب شده است. مولفه‌های غیر صفر x نیز مستقل از هم از توزیع گوسی استاندارد انتخاب شده‌اند. همچنین در هر آزمایش و برای هر گرهی، نویز به‌صورت سفید گوسی فرض شده است.

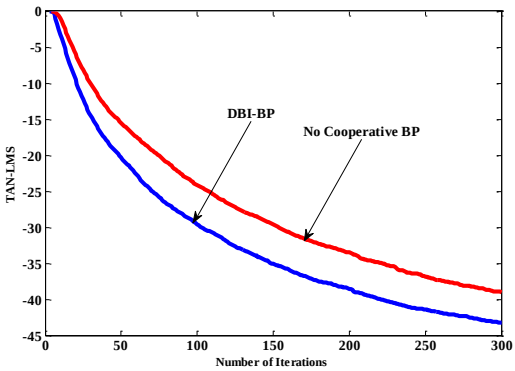
به‌منظور ارزیابی الگوریتم‌ها از متوسط خطای میانگین مربعات نرمالیزه شده کل استفاده کرده‌ایم. در این رابطه X ماتریسی است که از J بار کنار هم قرارگرفتن بردار تنک x که به دنبال تخمین آن هستیم ایجاد شده و $X^{\#}$ ماتریسی است که هر ستون آن شامل بردار تخمین‌زده‌شده توسط گره‌های شبکه است. همچنین $\|X\|_F$ همان نرم فربنیوس ماتریس X است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$TAN-MSE = E\left\{\frac{\|X^{\#}-X\|_F^2}{\|X\|_F^2}\right\} \quad (۵۳)$$

که در آن $tr(B)$ بر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس B دلالت دارد.

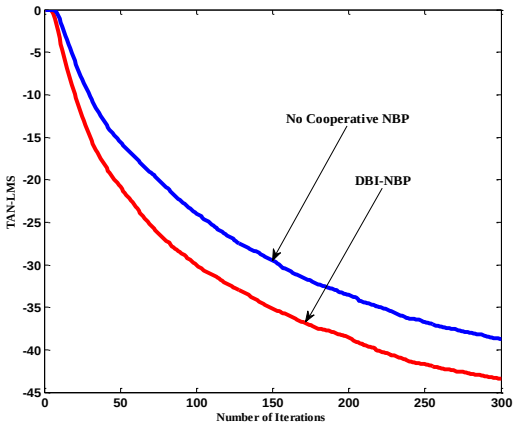
$$\|X\|_F = \sqrt{tr\left(XX^T\right)} \quad (۵۴)$$

شکل‌های (۳، ۴ و ۵) به‌ترتیب نتایج شبیه‌سازی‌های الگوریتم‌های پیشنهادی DBIBP، DBINBP و DBIRLS را برای $SNR = 30dB$ نشان می‌دهند.



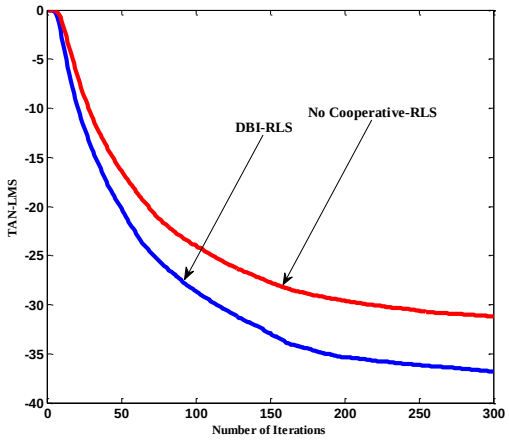
(شکل-۳): MSE کل بر حسب تعداد تکرارها برای الگوریتم DBI-BP

(Figure-3): MSE (in dB) versus number of iterations for DBI-BP algorithm



(شکل-۴): MSE کل بر حسب تعداد تکرارها برای الگوریتم DBI-NBP

(Figure-4): MSE (in dB) versus number of iterations for DBI-NBP algorithm



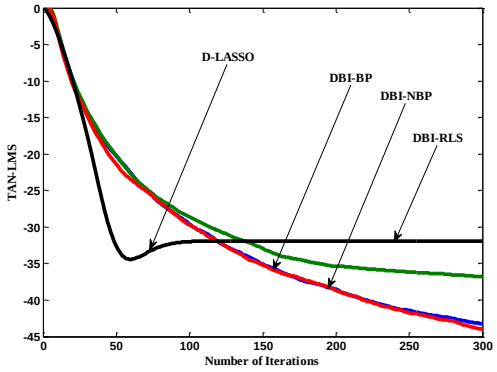
(شکل-۵): MSE کل بر حسب تعداد تکرارها برای الگوریتم DBI-RLS

(Figure-5): MSE (in dB) versus number of iterations for DBI-RLS algorithm

همان‌طور که مشاهده می‌شود روش‌های پیشنهادی در مقایسه با فرم غیرمشارکتی آن‌ها که در آن فرض شده هر گره به تنهایی و بدون مشارکت گره‌های دیگر شبکه الگوریتم بازسازی مربوطه را اجرا می‌کند، دارای عملکرد به مراتب بهتری است.

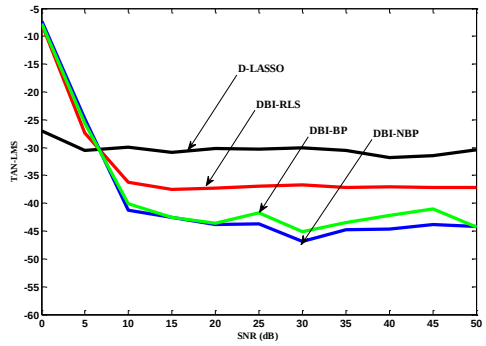
شکل (۶) متوسط خطای الگوریتم‌های پیشنهادی را با هم و با الگوریتم D-LASSO مقایسه می‌کند. هر چند که الگوریتم D-LASSO نسبت به الگوریتم‌های پیشنهادی دارای سرعت هم‌گرایی بهتری است اما، خطای حالت دائم الگوریتم‌های پیشنهادی به مراتب بهتر از D-LASSO است. این مسأله در شکل (۷) که در آن خطای حالت دائم این الگوریتم‌ها به‌ازای SNRهای متفاوت محاسبه شده به‌وضوح ملاحظه می‌شود. در کنار این مزیت، الگوریتم پیشنهادی همانند الگوریتم D-LASSO نیازمند محاسبه ماتریس وارون در هر گره نیست.

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]



(شکل-۶): MSE کل بر حسب تعداد تکرارها برای الگوریتم‌های مختلف

(Figure-6): MSE (in dB) versus number of iterations for different algorithms



(شکل-۷): MSE کل بر حسب SNR برای الگوریتم‌های مختلف

(Figure-7): MSE (in dB) versus SNR (in dB) for different algorithms

۵- نتیجه

در این مقاله، مسأله بازسازی سیگنال‌های تنک در شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم مورد توجه قرار گرفت. بر همین اساس، نخست یک الگوریتم توزیع شده که با مشارکت تمام گره‌های شبکه اجرا می‌شود، با استفاده از بهینه‌سازی ضرایب لاگرانژ ارائه شد؛ سپس سه مسأله بهینه‌سازی مختلف با استفاده از همین چهارچوب حل شده و سه الگوریتم متفاوت حاصل شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان دادند که الگوریتم‌های پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم معروف D-LASSO دارای خطای حالت دائم بهتری بوده و از طرفی همانند D-LASSO نیازمند محاسبه ماتریس وارون در هر گره نیستند. از دیگر سو در الگوریتم‌های پیشنهادی هر گره در هر تکرار فقط با دو همسایه خود به مبادله داده می‌پردازد و حال آنکه در D-LASSO هر گره با تمام همسایگان خود مبادله دارد. براین اساس، الگوریتم پیشنهادی برای شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم که با محدودیت انرژی روبه‌رو هستند مناسب‌تر است.

6- References ۶- مراجع

[1] E.J. Candès, and M.B. Wakin, “An introduction to compressive sampling”, *IEEE signal processing magazine*, vol. 25(2), pp.21-30, 2008.

[2] H. Shiri, M. A. Tinati, M. Codreanu, and G. Azarnia, “Distributed sparse diffusion estimation with reduced communication cost”, *IET Signal Processing*, vol. 12(8), pp. 1043-1052, 2018.

[3] G. Azarnia, M.A. Tinati, and T.Y. Rezaii, “Cooperative and distributed algorithm for compressed sensing recovery in WSNs”, *IET Signal Processing*, vol. 12(3), pp.346-357, 2017.

[4] B.K. Natarajan, “Sparse approximate solutions to linear systems”, *SIAM Journal on Computing*, vol. 24(2), pp. 227-234, 1995.

[5] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit,” *SIREV*, vol. 43(1), pp.129-159, 2001.

[6] E. J. Candès and T. Tao, “The Dantzig selector: Statistical estimation when p is much larger than n,” *The annals of Statistics*, vol. 35(6), pp. 2313-2351, 2007.

[7] R. Tibshirani, “Regression shrinkage and selection via the Lasso,” *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, vol. 58(1), pp. 267–288, 1996.

[8] D. Estrin, L. Girod, G. Pottie, and M. Srivastava, “Instrumenting the world with wireless sensor networks’, *In 2001 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No. 01CH37221)*, vol. 4, pp. 2033-2036, 2001.

[9] G. Azarnia, M. A. Tinati, and T. Y. Rezaii, “Generic cooperative and distributed algorithm for recovery of signals with the same sparsity profile in wireless sensor networks: a non-convex approach,” *The Journal of Supercomputing*, vol. 75(5), pp. 2315-2340, 2019.

[10] I. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam and E. Cayirci, “A survey on sensor networks”, *IEEE Communications Magazine*, Vol. 40(8), pp.102-114, 2002.

[11] C. Luo, F. Wu, J. Sun, and C. W. Chen, “Compressive data gathering for large-scale wireless sensor networks”, *In Proceedings of the 15th annual international conference on Mobile computing and networking*, 2009, 145–156,

[12] C. Luo, F. Wu, J. Sun, and C. Chen, “Efficient measurement generation and pervasive

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

predistribution via random gossiping", *in Proc. of IPSN*, pp. 51–59, 2006.

[24] W. Wang, M. Garofalakis, and K. Ramchandran, "Distributed sparse random projections for refinable approximation," *in Proc. of IPSN*, pp. 331–339, 2007.

[25] A. Talari and N. Rahnavard, "Cstorage: Distributed data storage in wireless sensor networks employing compressive sensing", *in Proc. IEEE Global Telecommunications Conf.*, 2012, pp. 1-5.

[26] M. Lin, C. Luo, F. Liu, and F. Wu. "Compressive data persistence in large-scale wireless sensor networks", *In Global Telecommunications Conference*, 2010, pp. 1–5.

[27] F. Liu, M. Lin, Y. Hu, C. Luo, and F. Wu, "Design and analysis of compressive data persistence in large-scale wireless sensor networks," *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst*., vol. 26(10), pp. 2685-2698, 2015.

[28] G. Azarnia and M. A. Tinati, "Steady-state analysis of the deficient length incremental LMS adaptive networks," *Circuits, Syst. Signal Process*., vol. 34(9), pp. 2893-2910, 2015.

[29] G. Azarnia and M. A. Tinati, "Steady-state analysis of the deficient length incremental LMS adaptive networks with noisy links," *AEU Int. J. Electron. Commun.*, vol. 69(1), pp. 153-162, 2015.

[30] Z. Zhao, J. Feng and B. Peng "A green distributed signal reconstruction algorithm in wireless sensor networks", *IEEE Access*, pp. 5908-5917, 2016.

[31] D. Sundman , S. Chatterjee , and M. Skoglund, "Design and analysis of a greedy pursuit for distributed compressed sensing", *IEEE Trans. Sig.* Process. Vol. 64 (11), pp. 2803–2818, 2016.

[32] W. Chen , and I.J. Wassell , "A decentralized bayesian algorithm for distributed compressive sensing in networked sensing systems", *IEEE Trans. Wireless Commu*, Vol. 15 (2), pp. 1282–1292, 2016.

[33] G. Mateos, J. A. Bazerque, and G. B. Giannakis, "Distributed sparse linear regression," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58(10), pp. 5262–5276, 2010.

[34] S. Foucart, H. Rauhut, "A Mathematical Introduction to Compressive Sensing", Springer, New York, August 2013.

sparsity for compressive data gathering", *IEEE Trans Wireless Commun*., vol. 9(12), pp. 3728–38, 2010.

[13] Y. Zhu and X. Wang, "Multi-session data gathering with compressive sensing for large-scale wireless sensor networks," in Proc. Global Telecommunications conf, 2010, pp. 1-5.

[14] A. Abrardo, C. M. Carretti, and A. Mecocci, "A compressive sampling data gathering approach for wireless sensor networks using a sparse acquisition matrix with abnormal values", *Communications Control and Signal Processing (ISCCSP), 2012 5th International Symposium on*, 2012, pp. 1-4.

[15] J. Wang, S. Tang, B. Yin, X. and Li, "Data gathering in wireless sensor networks through intelligent compressive sensing", *In 2012 Proceedings IEEE INFOCOM*, pp. 603-611, 2012.

[16] R. Xie and X. Jia, "Minimum transmission data gathering trees for compressive sensing in wireless sensor networks," *in Proc. IEEE GlobeCom*, pp. 1-5, 2011.

[17] X. Wu, Y. Xiong, W. Huang, H. Shen, and M. Li, "An efficient compressive data gathering routing scheme for large-scale wireless sensor networks," *Comput. Electr*, Eng, vol. 39(6), pp. 1935-1946, 2013.

[18] H. Zheng, F. Yang, X. Tian, X. Gan, X. Wang, and S. Xiao, "Data gathering with compressive sensing in wireless sensor networks: A random walk based approach," *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, vol. 26(1), pp. 35-44, 2015.

[19] D. Baron, M. B. Wakin, M. F. Duarte, S. Sarvotham, and R. G. Baraniuk, "Distributed compressed sensing", Dept. Elect. Eng., Rice University, Houston, TX, Tech. Rep. TREE-0612, 2006.

[20] J. Park, S. Hwang, J. Yang, and D. Kim, "Generalized distributed compressive sensing" appeared in Rice University Compressive Sensing Resources, http://www.dsp.rice.ed-u/cs.

[21] H. Xu, N. Fu, L. Qiao, and X. Peng, "Fast pursuit method for greedy algorithms in distributed compressive sensing," *in Conf. Rec., IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conf.*, pp. 1118-1122, 2015.

[22] W. Chen, I. Wassell, and M. Rodrigues, "Dictionary design for distributed compressive sensing," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22(1), pp. 95-99, 2015.

[23] M. Rabbat, J. Haupt, A. Singh, and R. Nowak, "Decentralized compression and

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]

قنبر آذرنیا تحصیلات خود را در مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق مخابرات سیستم در دانشگاه تبریز به پایان رساند؛ سپس به‌عنوان دانش آموخته برتر تحصیلات خود را در مقطع دکترای تخصصی رشته مهندسی برق مخابرات سیستم ادامه داده و در سال ۱۳۹۶ موفق به کسب درجه دکترای تخصصی از دانشگاه تبریز شد. ایشان هم اکنون استادیار دانشکده فنی و مهندسی خوی دانشگاه ارومیه هستند. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان عبارت‌اند از: پردازش توزیع‌شده در شبکه‌های حس‌گری بی‌سیم، تخمین کانال، پردازش سیگنال‌های پزشکی، حس‌گری فشرده، فیلتر وفقی و تبدیل موجک.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

g.azarnia@urmia.ac.ir

محمدعلی طینتی تحصیلات خود را در مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق مخابرات در دانشگاه نورت ایسترن امریکا و تحصیلات خود را در مقطع دکترای تخصصی در دانشگاه آدلاید استرالیا به اتمام رساند. ایشان هم‌اکنون استاد دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز هستند و تخصص اصلی ایشان پردازش سیگنال‌های صوتی، تصویری، پزشکی و مخابراتی است.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

tinati@tabrizu.ac.ir

توحید یوسفی رضایی تحصیلات خود در مقطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترای تخصصی را در دانشگاه تبریز به اتمام رساند. ایشان هم اکنون استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز هستند. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان عبارتند از: پردازش سیگنال آماری، حس‌گری فشرده، بازشناسی الگو و یادگیری آماری، پردازش سیگنال‌های بیولوژیکی، رابط کاربری مغز-کامپیوتر، فیلتر وفقی و شبکه‌های حس‌گری زیستی.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

yousefi@tabrizu.ac.ir

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-02-04]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.65]