یک مدل تحلیلی برای پیش‌بینی رفتار هم‌گرایی الگوریتم کمینه میانگین ترکیب نُرم (LMMN)

میثم کاظمی اقبال و قاسم علی‌پور*

گروه مهندسی برق، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران

چکیده

الگوریتم کمینه میانگین ترکیب نُرم (LMMN)، الگوریتمی مبتنی بر شیب تصادفی خطا است که هدف آن کمینه‌سازی ترکیبی از توابع هزینهٔ الگوریتم‌های کمینه میانگین مربعات (LMS) و کمینه میانگین چهارم (LMF) است. این الگوریتم بسیاری از ویژگی‌ها و مزایای الگوریتم‌های LMS و LMF را با خود به ارث برده است و از جهاتی ضعف‌های این دو الگوریتم را هم برطرف کرده است. بزرگ‌ترین مشکل الگوریتم LMMN فقدان یک مدل تحلیلی برای پیش‌بینی رفتار آن است، به‌طوری‌که کاربرد عملی آن‌را محدود کرده است. ما در این مقاله باهدف حل این مشکل، مدلی تحلیلی را ارائه می‌کنیم که قادر است رفتار میانگین مربعات خطا و میانگین خطای وزن‌ها را با دقت بالایی پیش‌بینی کند. دقت مدل استخراج‌شده از طریق آزمایش‌های متعددی تأیید می‌شود.

واژگان کلیدی: الگوریتم‌های وفقی، الگوریتم LMMN، مدل تحلیلی

An Analytical Model for Predicting the Convergence Behavior of the Least Mean Mixed-Norm (LMMN) Algorithm

Meysam Kazemi Eghbal & Ghasem Alipoor*

Electrical Engineering Department, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran

Abstract

Stochastic gradient-based adaptation algorithms have received a great attention in various applications. The most well-known algorithm in this category is the Least Mean Squares (LMS) algorithm that tries to minimize the second-order criterion of mean squares of the error signal. On the other hand, it has been shown that higher-order adaptive filtering algorithms based on higher-order statistics can perform better in many applications, particularly in the presence of intense noises. However, these algorithms are more prone to instability and also their convergence rates decline in the vicinity of their optimum solutions. In attempt to make use of the useful aspects of these algorithms, it has been proposed to combine the second-order criterion with higher-order ones, e.g. that of the Least Mean Fourth (LMF) algorithm. The Least Mean Mixed-Norm (LMMN) algorithm is a stochastic gradient-based algorithm which aim is to minimize an affine combination of the cost functions of the LMS and LMF algorithms. This algorithm has inherited many properties and advantages of the LMS and the LMF algorithms and mitigated their weaknesses in some ways. These advantages are achieved at the cost of the additional computation burden of just one addition and four multiplications per iteration. The main issue of the LMMN algorithm is the lack of an analytical model for predicting its behaviour, the fact that has restricted its practical application. To address this issue, an analytical model is presented in the current paper that is able to predict the mean-square-error and the mean-weights-error behaviour with a high accuracy. This model is derived using the Isserlis' theorem, based on two mild and practically valid assumptions; namely the input signal is stationary, zero-mean Gaussian and the measurement noise are

* نویسندهٔ عهده‌دار مکاتبات

* Corresponding author

• تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۲/۸ • تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۲ • تاریخ انتشار: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷ • نوع مطالعه: بنیادی

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]

additive zero-mean with an even probability distribution function (pdf). The accuracy of the derived model is verified using several simulation tests. These results show that the model is of a high accuracy in various settings for the noise's power level and distribution as well as the unknown filter characteristics. Furthermore, since the LMF and the LMS algorithms are special cases of the more general LMMN algorithm, the proposed model can also be used for predicting the behaviour of these algorithms.

Keywords: Adaptive Algorithms, LMMN Algorithm, Analytical Model

۱- مقدمه

الگوریتم‌های مبتنی بر شیب تصادفی، کاربردهای وسیعی در زمینه‌های مختلف ازجمله ارتباطات، مهندسی کنترل، مهندسی پزشکی و پردازش سیگنال عمومی دارند [1-3]. مشهورترین الگوریتم مبتنی بر شیب تصادفی خطا، الگوریتم کمینه میانگین مربعات[1] (LMS) است که هدف آن به کمینه‌رساندن مقدار میانگین مربعات خطا است [4]. مدل‌های تحلیلی بسیاری برای پیش‌بینی رفتار این الگوریتم تحت ورودی‌های مختلف، وجود دارند که کار با این الگوریتم را تسهیل می‌بخشند. از سوی دیگر اثبات شده است که الگوریتم‌های تطبیقی مبتنی بر شیب تصادفی خطا که بر اساس گشتاورهای مراتب بالاتر سیگنال خطا هستند، در برخی کاربردها عملکرد بهتری از الگوریتم LMS دارند [5-11]. ازاین‌دست الگوریتم‌ها می‌توان به الگوریتم کمینه میانگین چهارم[2] (LMF) و الگوریتم کمینه میانگین کشیدگی[3] (LMK) اشاره کرد. تفاوت رفتار این الگوریتم‌ها با الگوریتم LMS، به‌طوراساسی مرتبط با تأثیر توان مرتبهٔ بالا بر سیگنال خطا است؛ به‌طوری‌که شیب تابع هزینهٔ مبتنی بر گشتاور مرتبهٔ بالای سیگنال خطا، به نمونه‌های خطا با قدر مطلق بزرگ‌تر از واحد، بسیار پاسخگوتر است. این پدیده عواقب روشنی دارد، نخست آن‌که فیلترهای مبتنی بر گشتاورهای مراتب بالاتر سیگنال خطا، به‌سرعت می‌توانند ناپایدار شوند؛ مگر این‌که اندازهٔ گام به مقدار کافی کوچک انتخاب شود. علاوه بر این، برتری این الگوریتم‌ها محدود به نوفه‌هایی با توان بالا است و در نوفه‌های با توان پایین دچار کاهش شدید نرخ هم‌گرایی می‌شوند. از سوی دیگر الگوریتم LMS در مقایسه با الگوریتم‌های LMF، LMK و به‌طورکلی الگوریتم‌های مبتنی بر شیب مرتبهٔ بالاتر خطا، عملکرد بسیار بهتری را در نوفه‌هایی با توان پایین از خود به نمایش می‌گذارد. از این گذشته، به‌رغم نرخ هم‌گرایی سریع در الگوریتم‌های مرتبهٔ بالا، هنگامی‌که فیلتر به راه‌حل بهینه نزدیک می‌شود، نرخ هم‌گرایی این الگوریتم‌ها کاهش می‌یابد [5]. در تلاشی برای کنارآمدن با این مسائل، پیشنهاد شده است که توابع هزینهٔ الگوریتم‌های کمینه میانگین مربعات (LMS) و کمینه میانگین چهارم (LMF) ترکیب شوند که نتیجهٔ آن الگوریتم کمینه میانگین ترکیب نُرم[4] (LMMN) بود [12]. الگوریتم LMMN ویژگی‌های مطلوب الگوریتم‌های LMS و LMF را با خود به ارث برده است و همچنین از جهاتی معایب این دو الگوریتم را برطرف کرده است. این الگوریتم می‌تواند در برخی شرایط خاص، عملکرد بهتری را نسبت به الگوریتم‌های LMS و LMF داشته باشد [6]. ازنظر پیچیدگی محاسباتی، الگوریتم LMMN دارای یک عملیات جمع و چهار عملیات ضرب بیشتر از الگوریتم LMS است. جدول (۱) مقایسه‌ای بین پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌های LMF، LMS و LMMN برحسب تعداد عملیات ضرب و جمع در هر تکرار را نشان می‌دهد. در این جدول، N طول فیلتر وفقی FIR است.

(جدول-۱): پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌های LMS، LMF و LMMN

(Table-1): Complexity of the LMS, LMF and LMMN Algorithms

الگوریتم	تعداد عملیات جمع	تعداد عملیات ضرب
LMS	N	$N+2$
LMF	N	$N+4$
LMMN	$N+1$	$N+6$

بزرگ‌ترین عیب الگوریتم LMMN فقدان یک مدل تحلیلی برای پیش‌بینی رفتار آن است به‌طوری‌که کار با این الگوریتم بسیار محدود شده است. در [12] رفتار حالت ماندگار این الگوریتم بررسی شده است و عبارت دقیقی برای تنظیم نادرست[5] به‌دست آمده است. در مقاله جاری مدلی تحلیلی برای الگوریتم LMMN ارائه می‌شود که قادر است رفتار میانگین مربعات خطا و رفتار میانگین وزن‌ها و همچنین ماتریس همبستگی خطای وزن‌ها را با

[1] Least Mean Square
[2] Least Mean Fourth
[3] Least Mean Kurtosis
[4] Least-Mean Mixed-Norm
[5] Misadjustment

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]

دقت بالایی پیش‌بینی کند. برای به چالش کشیدن مدل، آزمایش‌هایی انجام شده‌اند که درستی مدل را نشان می‌دهند. این آزمایش‌ها تحت نوفه‌های افزودهٔ گاوسی، باینری و یک‌نواخت با میانگین صفر انجام شده‌اند. در بخش بعد الگوریتم LMMN معرفی شده است و مدل پیشنهادی برای پیش‌بینی رفتار آن در بخش سوم توسعه داده می‌شود. در بخش چهارم هم نتایج آزمایش‌های انجام‌شده برای بررسی دقت مدل پیشنهادی گزارش می‌شود. بخش آخر هم به جمع‌بندی مقاله اختصاص داده شده است.

۲- الگوریتم کمینه میانگین ترکیب نُرم (LMMN)

تابع هزینهٔ الگوریتم LMMN به‌صورت ترکیبی افاینی از میانگین مربع خطا و میانگین خطا به توان چهار تعریف می‌شود که با داشتن $\boldsymbol{w}(n)$ به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

$$J(n) = \lambda E[e^2(n)] + (1-\lambda)E[e^4(n)] \qquad (۱)$$

در رابطهٔ بالا $\boldsymbol{w}(n) = [w_1(n), \dots, w_N(n)]^T$ بردار ضرایب فیلتر تطبیقی و $e(n)$ خطای تقریب در لحظه n و $\lambda \in [0,1]$ پارامتر ترکیب است. ازآنجایی‌که مقدار گام تطبیق برای الگوریتم LMS نسبتاً بزرگ و برای الگوریتم LMF بسیار کوچک است، انتخاب مناسب پارامتر ترکیب λ، باعث سازگاری اندازهٔ گام μ با دو قسمت LMS و LMF در الگوریتم LMMN می‌شود. تقریب گرادیان تابع هزینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\nabla}J(n) = -2e(n)\big(\lambda + 2(1-n)e^2(n)\big)\boldsymbol{x}(n) \qquad (۲)$$

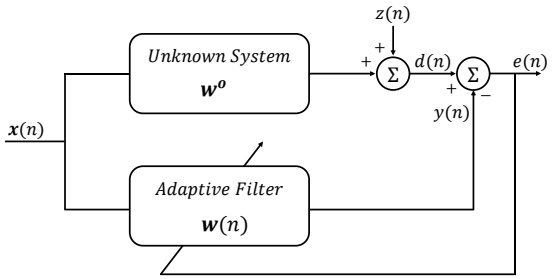
که در آن $\boldsymbol{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ بردار داده‌ی ورودی است. رابطهٔ خطا برحسب نوفه اندازه‌گیری $z(n)$ به‌صورت $e(n) = z(n) - \boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)$ به‌دست می‌آید و $\boldsymbol{v}(n) = \boldsymbol{w}(n) - \boldsymbol{w}^o$ بردار خطای وزن‌ها است. معادلهٔ به‌روزرسانی وزن‌ها برای الگوریتم LMMN به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{w}(n+1) = \boldsymbol{w}(n) - \mu\hat{\nabla}J(n) \qquad (۳)$$

۳- تحلیل تصادفی الگوریتم LMMN

برای بررسی الگوریتم LMMN از مسألهٔ شناسایی سیستم شکل (۱) استفاده می‌کنیم. بردار $\boldsymbol{w}^0 = [w_1^0, w_2^0, \dots, w_N^0]^T$ شامل نمونه‌های راه‌حل بهینه است که فیلتر تطبیقی باید آن را دنبال کند. $y(n)$ خروجی فیلتر تطبیقی و $e(n) = d(n) - y(n)$ خطای تقریب در لحظه n است. با کم کردن $\boldsymbol{w}^o$ از هر دو سمت رابطهٔ (۳) به رابطهٔ زیر برای خطای وزن‌ها می‌رسیم:

$$\boldsymbol{v}(n+1) = \boldsymbol{v}(n) + 2\mu\{2(1-\lambda)[e^2(n)] + \lambda\}e(n)\boldsymbol{x}(n) \qquad (۴)$$



(شکل-۱): بلوک دیاگرام شناسایی سیستم
(Figure-1): System Identification Block Diagram

۳-۱- فرض‌های مربوط به مدل‌های ورودی و نوفه

برای تحلیل تصادفی الگوریتم LMMN فرضیاتی را نیاز داریم. این فرضیات در زیر آورده شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که این فرض‌ها معقول و قابل‌قبول هستند.

الف) ورودی $x(n)$ ایستا، دارای میانگین صفر و توزیع گاوسی با واریانس σ_x^2 فرض می‌شود. همچنین:

$$E[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = \begin{cases} \boldsymbol{R}, & n = l \\ 0, & n \neq l \end{cases}$$

این فرض به‌عنوان فرض استقلال شناخته می‌شود و اگر سیگنال ورودی از مدل خط تأخیر پیروی کند، این رابطه چندان برقرار نیست. بااین‌وجود استفاده از این فرض در تحلیل الگوریتم‌های تطبیقی معمول است. به‌کاربردن این فرض منجر به ایجاد مدل‌هایی تحلیلی شده است که در بسیاری از موارد، برای طراحی عملی دقت لازم را دارند.

ب) $z(n)$ ایستا بوده و دارای میانگین صفر و واریانس σ_z^2 و تابع چگالی احتمال زوجی برابر با $p_z(z)$ است و به‌ازای تمامی lها و nها از $\boldsymbol{x}(l)$ مستقل است.

ج) به‌ازای $l \leq n$ بردارهای $\boldsymbol{x}(n)$ و $\boldsymbol{v}(l)$ مستقل فرض می‌شوند. این فرض به‌دلیل فرض استقلال معتبر است.

۳-۲- رفتار میانگین وزن‌ها

$\boldsymbol{K} = E[\boldsymbol{v}(n)\boldsymbol{v}^T(n)]$ ماتریس همبستگی خطای وزن‌هاست. با میانگین‌گیری از رابطهٔ (۴) بر روی ورودی‌ها که بر بردار $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ مشروط شده‌اند و با استفاده از فرض استقلال و سپس میانگین‌گیری از هر دو سمت عبارت حاصله بر روی $\boldsymbol{v}(n)$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]

$$E[\boldsymbol{v}(n+1)] = E[\boldsymbol{v}(n)] + 2\mu\{2(1-\lambda)[E[e^3(n)\boldsymbol{x}(n)]] + \lambda E[e(n)\boldsymbol{x}(n)]\} \quad (۵)$$

اکنون

$$E[e(n)\boldsymbol{x}(n)] = E\{[z(n) - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{v}(n)]\boldsymbol{x}(n)\} = -\boldsymbol{R}E[\boldsymbol{v}(n)] \quad (۶)$$

ارزیابی عبارت $E[e^3(n)\boldsymbol{x}(n)]$ نیازمند آن است که گشتاورهای مراتب بالاتر متغیرهای گاوسی را تعیین کنیم. محاسبهٔ مستقیم این پارامترها منجر به رابطهٔ زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} &E[e^3(k)\boldsymbol{x}(n)] \\ &= E\{-3z^2(n)\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{v}(n)\boldsymbol{x}(n) \\ &+ [\boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)]^3\boldsymbol{x}(n)\} \\ &= -3\sigma_z^2\boldsymbol{R}E[\boldsymbol{v}(n)] \\ &- 3E\{[\boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)]^3\boldsymbol{x}(n)\} \end{aligned} \quad (۷)$$

برای تعداد زیادی از ضرایب، فرض می‌کنیم که $\boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)$ دارای توزیع گاوسی با میانگین صفر است، به‌طوری‌که:

$$\boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

از قضیهٔ ایسرلیس[1] [5]، برای متغیرهای تصادفی گاوسی مشترک با میانگین صفر a_1، a_2، a_3 و a_4 داریم:

$$E[a_1a_2a_3a_4] = \sum\prod E[a_ia_j] \quad (۸)$$

به‌ازای تمامی حالت‌های مختلف انتخاب i و j، رابطهٔ (۸) برقرار است. در این رابطه $a_1 = a_2 = a_3 = \boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)$ و $a_4 = x(n-k)$، به‌ازای $k = 0, \dots, N-1$ انتخاب می‌شوند. در این صورت محاسبهٔ مستقیم با استفاده از فرضیات آماری بخش ۱-۳ منجر به رابطهٔ زیر می‌شود:

$$E[e^3(n)\boldsymbol{x}(n)] = 3E[e^2(n)]E[e(n)\boldsymbol{x}(n)] = -3\{\sigma_z^2 + tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\}\boldsymbol{R}E[\boldsymbol{v}(n)] \quad (۹)$$

با قرار دادن روابط (۶) و (۹) در رابطهٔ (۵) به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$E[\boldsymbol{v}(n+1)] = E[\boldsymbol{v}(n)] - 2\mu\{6(1-\lambda)[\sigma_z^2 + tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]] + \lambda\}\boldsymbol{R}E[\boldsymbol{v}(n)] \quad (۱۰)$$

لازم است مدلی برای پیش‌بینی رفتار ماتریس همبستگی خطای وزن‌ها، یعنی $\boldsymbol{K}(n)$، به‌دست آوریم تا مدل تحلیلی را کامل کرده و عملکرد میانگین مربعات خطا در الگوریتم LMMN را بررسی نماییم. این تحلیل در بخش بعد ارائه خواهد شد.

[1] Isserlis' Theorem

۳-۳- تحلیل گشتاور دوم

با ضرب رابطهٔ (۴) در ترانهاده‌اش و میانگین‌گیری از حاصل‌ضرب، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{K}(n+1) \\ &= \boldsymbol{K}(n) \\ &+ 2\mu E\{[2(1-\lambda)e^2(n) + \lambda] \\ &\times e(n)[\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{v}^T(n) + \boldsymbol{v}(n)\boldsymbol{x}^T(n)]\} \\ &+ 4\mu^2 E\{[2(1-\lambda)e^2(n) \\ &+ \lambda]^2 e^2(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

عبارت‌های ضرب‌شده در μ را در سمت راست رابطهٔ (۱۱) که پیش‌ازاین ارزیابی نشده‌اند، می‌توان به‌صورت میانگین بازگشتی به دست آورد. درنتیجه خواهیم داشت:

$$E\{[2(1-\lambda)e^2(n) + \lambda]e(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{v}^T(n)\} = -\{6(1-\lambda)[\sigma_z^2 + tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]] + \lambda\}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n) \quad (۱۲)$$

و

$$E\{[2(1-\lambda)e^2(n) + \lambda]e(n)\boldsymbol{v}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\} = -\{6(1-\lambda)[\sigma_z^2 + tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]] + \lambda\}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R} \quad (۱۳)$$

عبارت ضرب‌شده در μ^2 در سمت راست رابطهٔ (۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &E\{[2(1-\lambda)e^2(n) \\ &+ \lambda]^2 e^2(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\} \\ &= E\{4(1-\lambda)^2 e^6(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n) \\ &+ 4\lambda(1-\lambda)e^4(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n) \\ &+ \lambda^2 e^2(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\} \end{aligned} \quad (۱۴)$$

عبارات باقی‌ماندهٔ موجود در رابطهٔ (۱۴) به فرم $E[e^{2q}(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)]$ به‌ازای $q = 1, 2, 3$ هستند. سودمند است که عبارت $e^{2q}(n)$ را به‌صورت دوجمله‌ای گسترش دهیم تا بتوانیم از گشتاورهای گاوسی حاصله برای هر توزیع نوفه‌ای استفاده کنیم. توجه داشته باشید که $e(n) = z(n) - \boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)$ مشروط بر $\boldsymbol{v}(n)$ با مجموع متغیر نوفه افزوده به‌علاوه متغیر گاوسی برابر است. اجازه دهید $a = \boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)$ باشد، بنابراین برای $q = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} &E[e^2(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] \\ &= E\{[z^2(n) - 2z(n)a \\ &+ a^2]\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\} \\ &= \sigma_z^2\boldsymbol{R} \\ &+ E[a^2\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] \end{aligned} \quad (۱۵)$$

اکنون عبارت دوم سمت راست رابطهٔ (۱۵) را بر $\boldsymbol{v}(n)$ مشروط کرده و از قضیهٔ ایسرلیس برای ارزیابی گشتاورهای گاوسی استفاده می‌کنیم، که نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]

$$E[a^2\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] = E[a^2|\boldsymbol{v}(n)]\boldsymbol{R} + 2E[a\boldsymbol{x}(n)|\boldsymbol{v}(n)]E[a\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] \quad (۱۶)$$

بنابراین:

$$E[a^2|\boldsymbol{v}(n)] = E[\boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{v}(n)|\boldsymbol{v}(n)] = \boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}(n) \quad (۱۷)$$

و

$$E[a\boldsymbol{x}(n)|\boldsymbol{v}(n)]E[a\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}(n)\boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{R} \quad (۱۸)$$

با میانگین‌گیری از روابط (۱۷) و (۱۸) بر روی $\boldsymbol{v}(n)$ و قراردادن نتیجه آن‌ها در رابطهٔ (۱۵) به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$E[e^2(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = \{\sigma_z^2 + tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\}\boldsymbol{R} + 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R} \quad (۱۹)$$

اکنون حالت $q = 2$ را در نظر بگیرید:

$$E[e^4(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = E\{[z^4(n) + 6z^2(n)a^2 + a^4]\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\} \quad (۲۰)$$

در رابطهٔ بالا، به دلیل ویژگی‌های فرض‌شده برای نوفه افزوده $z(n)$، امید ریاضی $z(n)$ به توان اعداد فرد برابر با صفر می‌شود. اکنون:

$$E[z^4(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = E[z^4(n)]\boldsymbol{R} \quad (۲۱)$$

و

$$6E[z^2(n)a^2\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = 6E[z^2(n)]E[a^2\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = 6\sigma_z^2\{tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R} + 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R}\} \quad (۲۲)$$

آخرین عبارت رابطهٔ (۲۲) را می‌توان با قراردادن $\sigma_z^2 = 0$ در رابطهٔ (۱۹) به‌دست آورد. آخرین امید ریاضی موجود در رابطهٔ (۲۰) را می‌توان توسط قضیهٔ ایسرلیس به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$E[a^4\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] = 3E^2[a^2|\boldsymbol{v}(n)]\boldsymbol{R} + 12E[a^2|\boldsymbol{v}(n)]E[a\boldsymbol{x}(n)|\boldsymbol{v}(n)] \times E[a\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] \quad (۲۳)$$

برای مقادیر بسیار کوچک μ، تغییرات $\boldsymbol{v}(n)\boldsymbol{v}^T(n)$ را می‌توان نادیده گرفت و فرض کرد که $\boldsymbol{v}(n)\boldsymbol{v}^T(n) \approx \boldsymbol{K}(n)$ است. با استفاده از این تقریب، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E[e^4(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = E[z^4(n)]\boldsymbol{R} + 6\sigma_z^2\{tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R} + 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R}\} + 3tr^2[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R} + 12tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R} \quad (۲۴)$$

رابطهٔ (۲۴) برای هر نوفه‌ای با تابع چگالی احتمال زوج $p_z[z(n)]$ برقرار است. گشتاورهای مراتب بالاتر نوفه باید به‌ازای توزیع نوفه خاص ارزیابی شوند؛ درنهایت، حالت $q = 3$ را در نظر می‌گیریم. با گسترش‌دادن $e^6(n)$ با توجه به $z(n)$ و $a = \boldsymbol{v}^T(n)\boldsymbol{x}(n)$ (پس از حذف گشتاورهای فرد $z(n)$)، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E[e^6(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = E\{[z^6(n) + 15z^4(n)a^2 + 15z^2(n)a^4 + a^6]\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)\} = E[z^6(n)]\boldsymbol{R} + 15E[z^4(n)]E[a^2\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] + 15[z^2(n)]E[a^4\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] + E[a^6\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] \quad (۲۵)$$

به‌غیراز عبارت آخر، در رابطهٔ بالا تمامی امیدهای ریاضی قبلاً ارزیابی شده‌اند. با مشروط‌کردن عبارت آخر رابطهٔ (۲۵) بر $\boldsymbol{v}(n)$ و ادامهٔ تحلیل خواهیم داشت:

$$E[a^6\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] = E[a^6|\boldsymbol{v}(n)]\boldsymbol{R} + 30E[a^4|\boldsymbol{v}(n)]E[a\boldsymbol{x}(n)|\boldsymbol{v}(n)] \times E[a\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] = 15E^3[a^2|\boldsymbol{v}(n)]\boldsymbol{R} + 90E^2[a^2|\boldsymbol{v}(n)]E[a\boldsymbol{x}(n)|\boldsymbol{v}(n)] \times E[a\boldsymbol{x}^T(n)|\boldsymbol{v}(n)] \quad (۲۶)$$

عبارات موجود در رابطهٔ (۲۶) را می‌توان با همان استدلال به کار رفته برای حالت $q = 2$ تعیین کرد. با استفاده از نتیجهٔ موجود در رابطهٔ (۲۵)، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E[e^6(n)\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^T(n)] = E[z^6(n)]\boldsymbol{R} + 15E[z^4(n)]\{tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R} + 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R}\} + 15\sigma_z^2\{3tr^2[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R} + 12tr[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R}\} + 15tr^3[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R} + 90tr^2[\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)]\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R} \quad (۲۷)$$

رابطهٔ (۲۷) یکی از عبارت‌های موجود در رابطه‌ی (۱۴) است. درنهایت با قراردادن روابط (۱۴) تا (۲۷) در رابطه (۱۱) به مدل زیر برای پیش‌بینی رفتار ماتریس همبستگی خطای وزن‌ها می‌رسیم:

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}(n+1)\\
&=\boldsymbol{K}(n)\\
&-2\mu\big(6(1-\lambda)\big[\sigma_z^2+tr[\boldsymbol{RK}(n)]\big]\\
&+\lambda\big)(\boldsymbol{RK}(n)+\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{R})\\
&+4\mu^2\big\{4(1-\lambda)^2\{E[z^6(n)]\boldsymbol{R}\\
&+15E[z^4(n)]\{tr[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{R}\\
&+2\boldsymbol{RK}(n)\boldsymbol{R}\}\\
&+15\sigma_z^2\{3tr^2[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{R}\\
&+12tr[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{RK}(n)\boldsymbol{R}\}\\
&+15tr^3[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{R}\\
&+90tr^2[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{RK}(n)\boldsymbol{R}\}\\
&+4\lambda(1-\lambda)\{E[z^4(n)]\boldsymbol{R}\\
&+6\sigma_z^2\{tr[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{R}+2\boldsymbol{RK}(n)\boldsymbol{R}\}\\
&+3tr^2[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{R}\\
&+12tr[\boldsymbol{RK}(n)]\boldsymbol{RK}(n)\boldsymbol{R}\}\\
&+\lambda^2\{(\sigma_z^2+tr[\boldsymbol{RK}(n)])\boldsymbol{R}+2\boldsymbol{RK}(n)\boldsymbol{R}\}\big\}
\end{aligned}
\qquad (۲۸)
$$

رابطهٔ (۲۸) را می‌توان با هر نوفه‌ای با تابع چگالی احتمال زوج به کار برد. گشتاورهای مراتب بالاتر $E[z^4(n)]$ و $E[z^6(n)]$ باید به‌ازای هر توزیع نوفه محاسبه شوند. برای مثال برای نوفه گاوسی $E[z^4(n)] = 3\sigma_z^4$ و $E[z^6(n)] = 15\sigma_z^6$ هستند؛ برای نوفه دودویی $E[z^4(n)] = \sigma_z^4$ و $E[z^6(n)] = \sigma_z^6$، و برای نوفه یکنواخت $E[z^4(n)] = \frac{9}{5}\sigma_z^4$ و $E[z^6(n)] = \frac{27}{7}\sigma_z^6$ هستند [5]. همچنین رابطهٔ MSE برای الگوریتم‌های مبتنی بر شیب تصادفی به‌صورت زیر تعیین می‌شود [2] که برای الگوریتم LMMN نیز چنین است:

$$\xi(n) = E[e^2(n)] = \sigma_z^2 + tr[\boldsymbol{RK}(n)] \qquad (۲۹)$$

مدل تحلیلی برای رفتار الگوریتم LMMN از روابط (۲۹)، (۲۸) و (۱۰) تشکیل شده است.

۴- بررسی دقت مدل استخراج‌شده با شبیه‌سازی مونت‌کارلو

در این بخش آزمایش‌هایی بر روی مدل تحلیلی ارائه‌شده برای الگوریتم LMMN تحت مسألهٔ شناسایی سیستم شکل (۱) انجام شده‌اند. در برخی از این آزمایش‌ها سیگنال ورودی همبسته است و به‌وسیله یک مدل خودکاهنده $x(n) = ax(n-1) + y(n)$ تولید می‌شود. واریانس $\sigma_y^2 = E[y^2]$ به‌گونه‌ای تعیین شده است که به توان ورودی مطلوب دست یابیم. پاسخ ضربهٔ سیستم ناشناس به‌صورت زیر است:

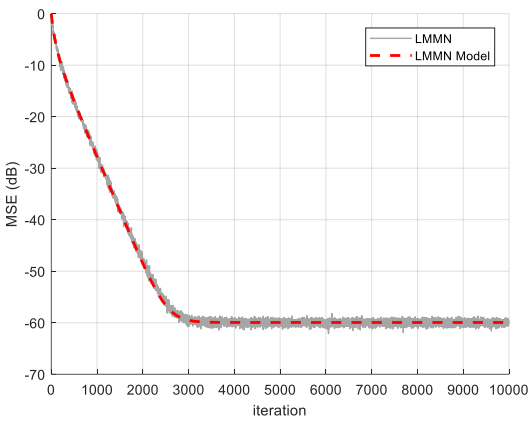
$$\boldsymbol{w}^0 = [0.0610, 0.1832, 0.3054, 0.4276, 0.6108, 0.4276, 0.3054, 0.1832, 0.0610]^T$$

به‌طوری‌که $\boldsymbol{w}^{0T}\boldsymbol{w}^0 = 1$ باشد. هدف از این آزمایش‌ها، ارزیابی صحت و دقت مدل تئوری است. در این آزمایش‌ها رفتار میانگین مربعات خطا (MSE) و همچنین رفتار میانگین وزن‌ها بررسی شده‌اند. این آزمایش‌ها به‌ازای SNRهای صفر و ۶۰ دسی‌بل انجام شده‌اند. برای بررسی دقیق‌تر مدل، پارامترهای σ_z^2، a، μ و λ تغییر داده شده‌اند. سه توزیع گاوسی، باینری و یکنواخت برای نوفه اندازه‌گیری در انجام آزمایش‌ها در نظر گرفته شده است، به‌طوری‌که همهٔ این نوفه‌ها دارای میانگین صفر و تابع چگالی احتمال زوج هستند.

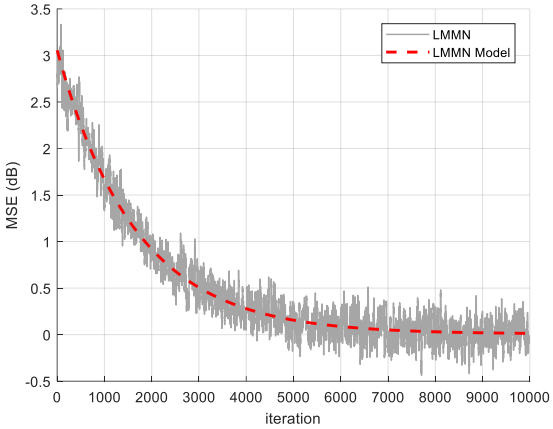
شکل (۲) مجموعه‌ای از نتایج شبیه‌سازی را به‌ازای نوفه افزوده با توزیع گاوسی و میانگین صفر نشان می‌دهد. هر آزمایش به ازای پارامترهای مختلف انجام پذیرفته است که این پارامترها در زیر هر شکل آورده شده است. منحنی‌های خط‌چین از مدل تحلیلی و منحنی‌های ناصاف و پیوسته از شبیه‌سازی به‌دست آمده‌اند. به‌وضوح مشاهده می‌شود که مدل به‌دست‌آمده برای الگوریتم LMMN، به‌طوردقیق رفتار این الگوریتم را پیش‌بینی می‌کند. شکل (۳) رفتار میانگین وزن‌های الگوریتم LMMN را به‌ازای نوفه افزودهٔ گاوسی نشان می‌دهد، این آزمایش‌ها نیز حاکی از دقت بالای مدل به‌ازای نوفه افزودهٔ گاوسی هستند. آزمایش‌های مشابهی نیز به ازای نوفه‌های افزودهٔ یکنواخت و باینری انجام پذیرفته‌اند که نتایج آن در شکل‌های (۴ الی ۷) آمده‌اند. شکل‌های (۴ و ۵) به‌ترتیب رفتار میانگین مربعات خطا و رفتار میانگین وزن‌ها را به‌ازای نوفه افزودهٔ یکنواخت نشان می‌دهند. همچنین شکل‌های (۶ و ۷) به‌ترتیب رفتار میانگین مربعات خطا و رفتار میانگین وزن‌ها را به‌ازای نوفه افزودهٔ دودویی نشان می‌دهند. همان‌طور که از این شکل‌ها نیز مشخص است، مدل استخراج‌شده برای الگوریتم LMMN، مدلی کارآمد و دقیق است.

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

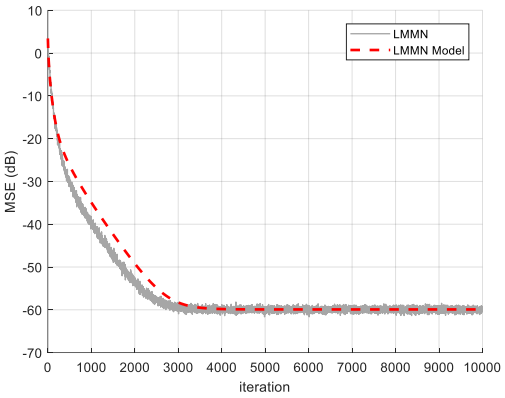
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]



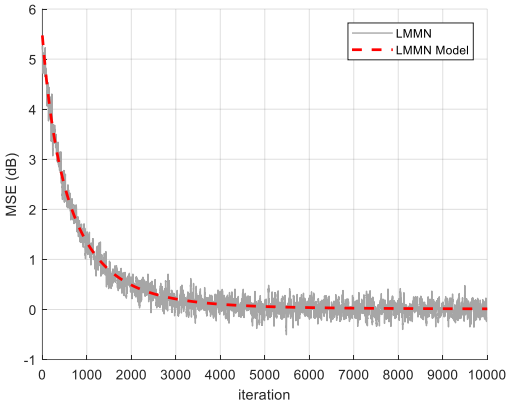
(ب) $\lambda = 0.6 \;،\mu = 2 \times 10^{-3} \;،a = 0 \;،\sigma_z^2 = 10^{-6}$



(الف) $\lambda = 0.9 \;،\mu = 10^{-4} \;،a = 0 \;،\sigma_z^2 = 1$



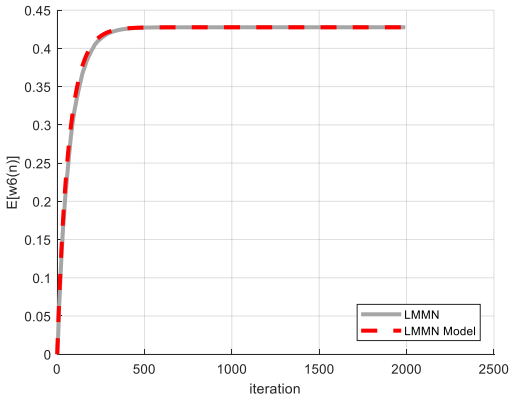
(د) $\lambda = 0.74 \;،\mu = 3 \times 10^{-3} \;،a = 0.5 \;،\sigma_z^2 = 10^{-6}$



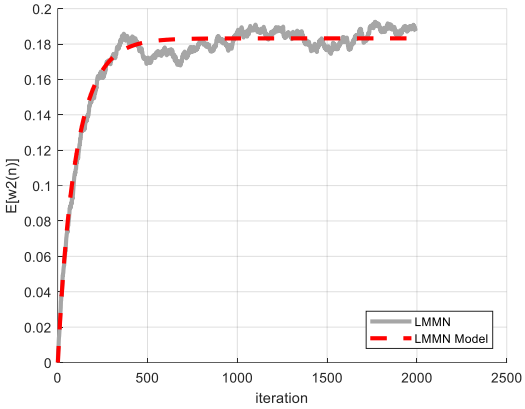
(ج) $\lambda = 0.2 \;،\mu = 2 \times 10^{-5} \;،a = 0.5 \;،\sigma_z^2 = 1$

(شکل-۲): منحنی‌های MSE به‌ازای نوفه افزودهٔ گاوسی

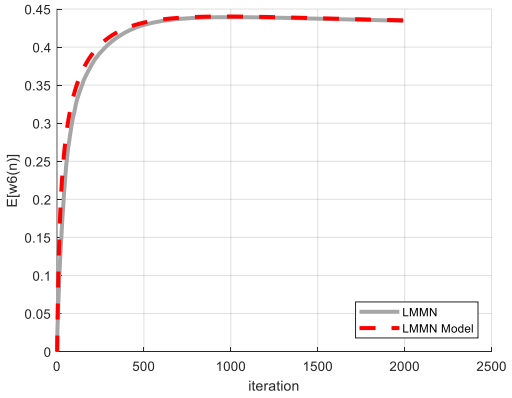
(Figure-2): MSE curves for additive Gaussian noise



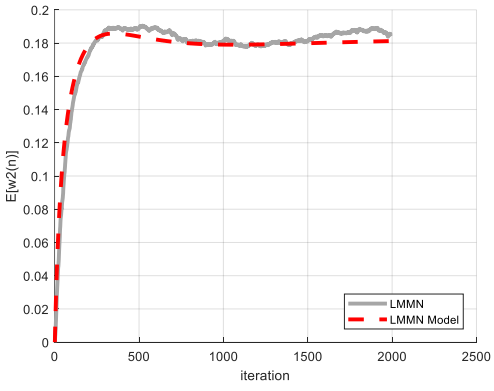
(ب) $\lambda = 0.97 \;،\mu = 7 \times 10^{-3} \;،a = 0 \;،\sigma_z^2 = 10^{-6}$



(الف) $\lambda = 0.93 \;،\mu = 3 \times 10^{-3} \;،a = 0 \;،\sigma_z^2 = 1$



(د) $\lambda = 0.7 \;،\mu = 1.5 \times 10^{-3} \;،a = 0.5 \;،\sigma_z^2 = 10^{-6}$



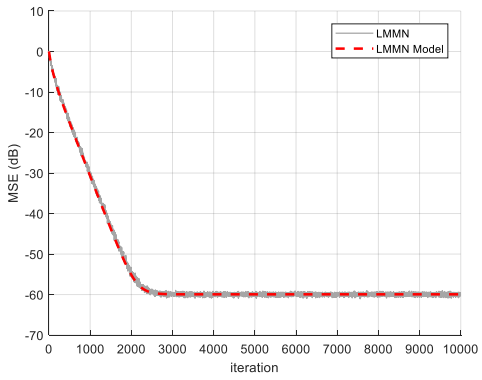
(ج) $\lambda = 0.83 \;،\mu = 7 \times 10^{-4} \;،a = 0.5 \;،\sigma_z^2 = 1$

(شکل-۳): رفتار میانگین وزن‌های دومین و ششمین ضریب فیلتر تطبیقی، یعنی $E[w_2(n)]$ و $E[w_6(n)]$ به‌ازای نوفه افزودهٔ گاوسی

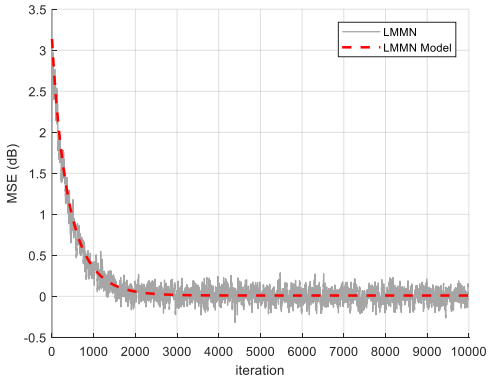
(Figure-3): Mean behavior of the 2nd and the 6th coefficients of the adaptive filter, i.e. $E[w_2(n)]$ and $E[w_6(n)]$, for additive Gaussian noise

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

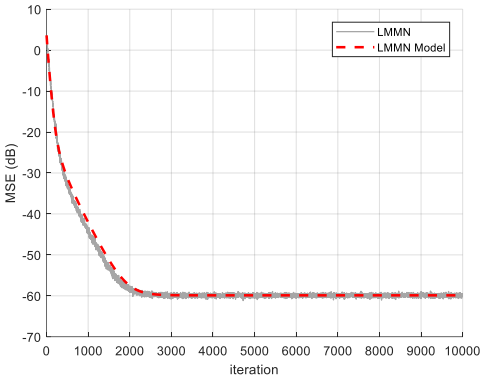
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]



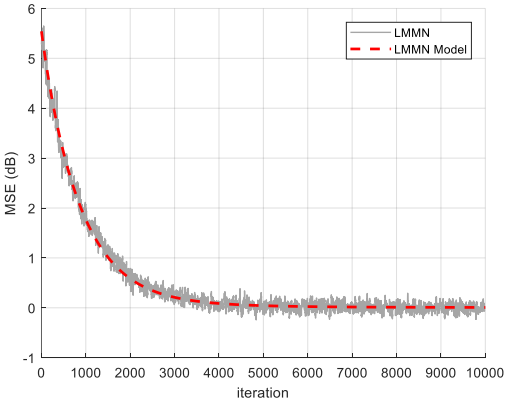
(ب) $\lambda = 0.75$ ،$\mu = 2 \times 10^{-3}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



(الف) $\lambda = 0.2$ ،$\mu = 10^{-4}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 1$



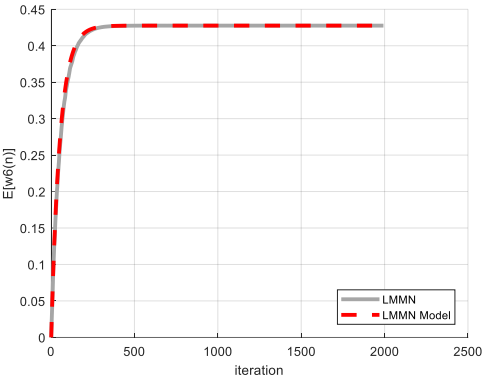
(د) $\lambda = 0.98$ ،$\mu = 3 \times 10^{-3}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



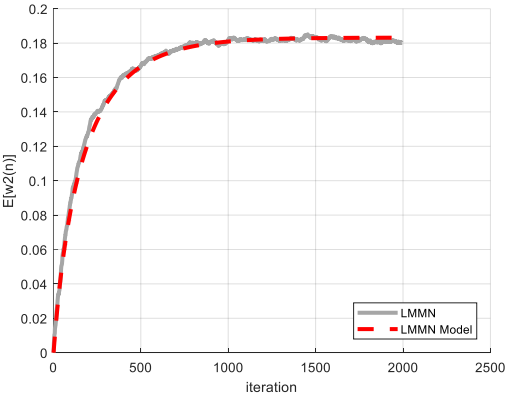
(ج) $\lambda = 0.94$ ،$\mu = 9 \times 10^{-5}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 1$

(شکل-۴): منحنی‌های MSE به‌ازای نوفه افزودهٔ یکنواخت

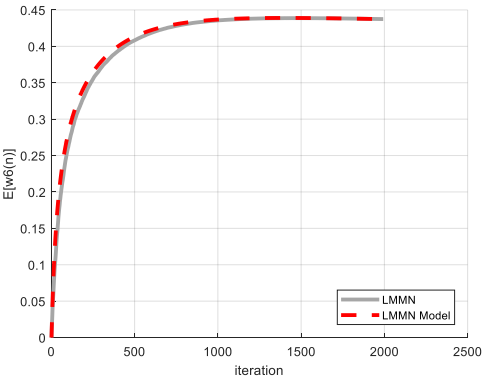
(Figure-4): MSE curves for additive uniform noise



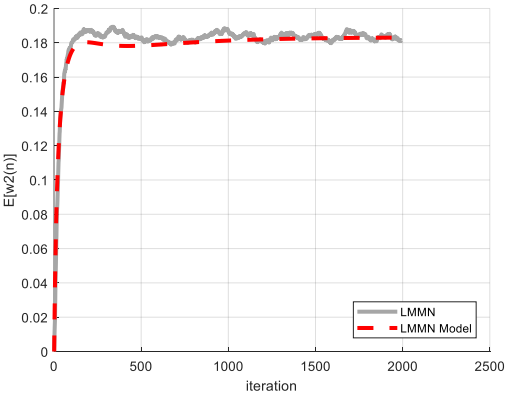
(ب) $\lambda = 0.99$ ،$\mu = 9 \times 10^{-3}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



(الف) $\lambda = 0.4$ ،$\mu = 5 \times 10^{-4}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 1$



(د) $\lambda = 0.76$ ،$\mu = 10^{-3}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



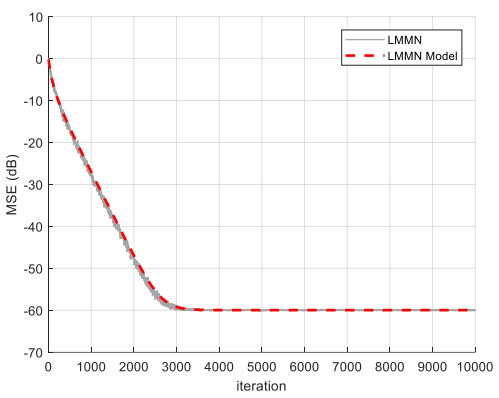
(ج) $\lambda = 0.5$ ،$\mu = 8 \times 10^{-4}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 1$

(شکل-۵): رفتار میانگین وزن‌های دومین و ششمین ضریب فیلتر تطبیقی، یعنی $E[w_2(n)]$ و $E[w_6(n)]$ به‌ازای نوفه افزودهٔ یکنواخت

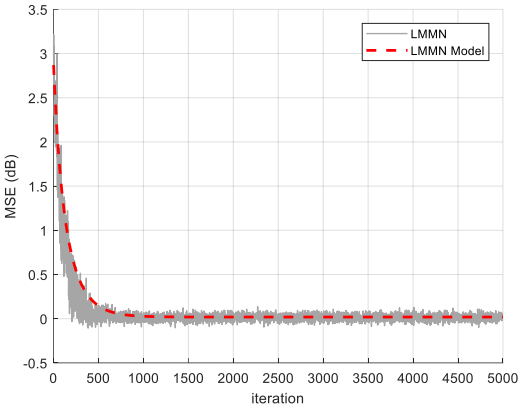
(Figure-5): Mean behavior of the 2nd and the 6th coefficients of the adaptive filter, i.e. $E[w_2(n)]$ and $E[w_6(n)]$, for additive uniform noise

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

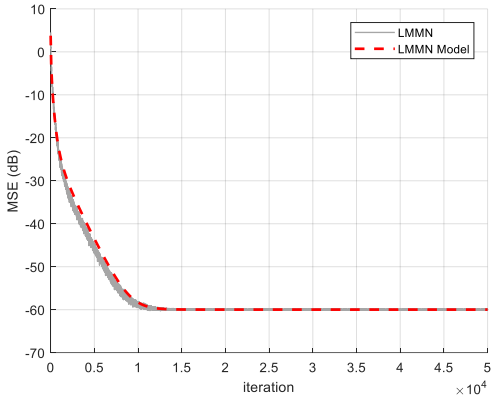
[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]



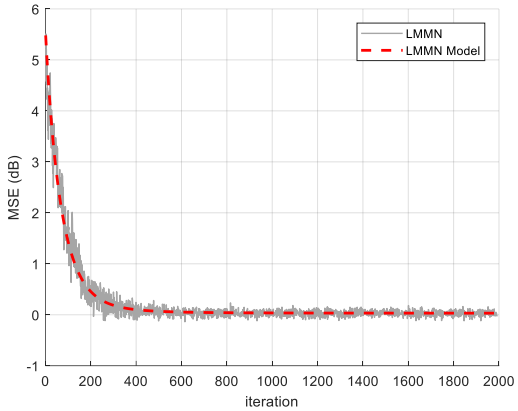
(ب) $\lambda = 0.6$ ،$\mu = 2 \times 10^{-3}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



(الف) $\lambda = 0.3$ ،$\mu = 5 \times 10^{-4}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 1$



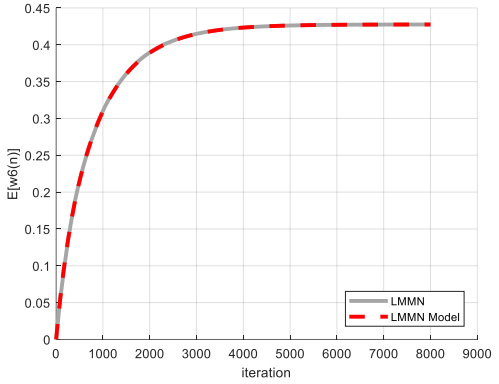
(د) $\lambda = 0.66$ ،$\mu = 9 \times 10^{-4}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



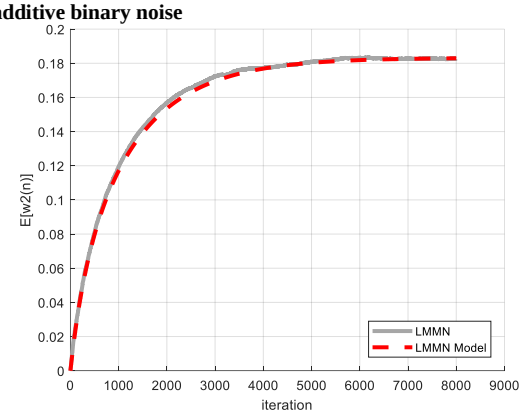
(ج) $\lambda = 0.9$ ،$\mu = 9 \times 10^{-4}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 1$

(شکل-۶): منحنی‌های MSE به‌ازای نوفه افزودهٔ دودویی

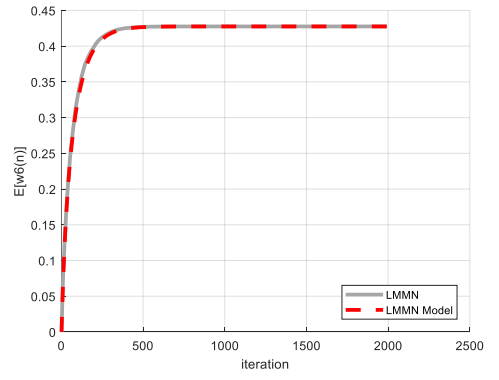
(Figure-6): MSE curves for additive binary noise



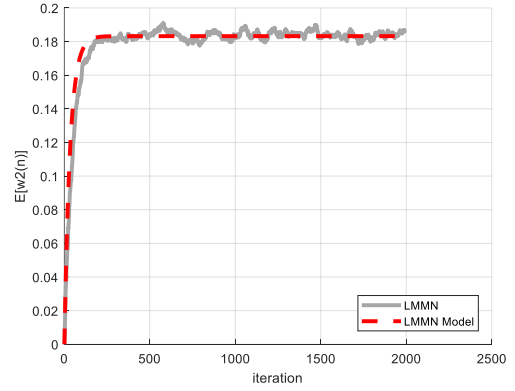
(ب) $\lambda = 0.92$ ،$\mu = 6 \times 10^{-4}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



(الف) $\lambda = 0.4$ ،$\mu = 10^{-4}$ ،$a = 0$ ،$\sigma_z^2 = 1$



(د) $\lambda = 0.89$ ،$\mu = 7 \times 10^{-3}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 10^{-6}$



(ج) $\lambda = 0.45$ ،$\mu = 2 \times 10^{-3}$ ،$a = 0.5$ ،$\sigma_z^2 = 1$

(شکل-۷): رفتار میانگین وزن‌های دومین و ششمین ضریب فیلتر تطبیقی، یعنی $E[w_2(n)]$ و $E[w_6(n)]$ به‌ازای نوفه افزودهٔ یکنواخت

(Figure-7): Mean behavior of the 2nd and the 6th coefficients of the adaptive filter, i.e. $E[w_2(n)]$ and $E[w_6(n)]$, for additive binary noise

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]

۵- جمع‌بندی

در این مقاله بر پایهٔ فرضیاتی معمول، مدلی برای الگوریتم LMMN استخراج شد. این مدل قادر است رفتار میانگین مربعات خطا و رفتار میانگین وزن‌ها را با دقت بالایی پیش‌بینی کند. آزمایش‌های انجام‌شده در این مقاله، علاوه‌بر اعتبار فرضیات، حاکی از دقت بالای مدل بودند. گفتنی است که نتایج گزارش‌شده در این مقاله، نتایج تنها بخشی از آزمایش‌های انجام شده است. درواقع دقت مدل پیشنهادی به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها و در سطوح مختلف نوفه و نیز با استفاده از تعدادی فیلتر ناشناخته دیگر با طول‌های مختلف مورد آزمایش قرار گرفت که نتایج حاصل بیان‌گر دقت بالای مدل پیشنهادی در همه این شرایط بود. همچنین ازآنجاکه با صفر قراردادن پارامتر ترکیب، الگوریتم LMMN به الگوریتم LMF تبدیل می‌شود، بنابراین می‌توان از مدل به‌دست‌آمده برای LMMN برای الگوریتم LMF نیز استفاده کرد.

۶- مراجع 6- References

[1] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive filters: theory and applications*: John Wiley & Sons, 2013.

[2] S. S. Haykin, *Adaptive filter theory*: Pearson Education India, 2008.

[3] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, "Statistical and adaptive signal processing: spectral estimation," *signal modeling, adaptive filtering, and array processing*: McGraw-Hill Boston, 2000.

[4] S. D. J. T. i. s. i. E. Paulo, and C. Scienc, "Adaptive filtering: algorithms and practical implementation," pp. 23-50, 2008.

[5] N. J. Bershad, and J. C. J. D. S. P. Bermudez, "Stochastic analysis of the least mean kurtosis algorithm for Gaussian inputs," vol. 54, pp. 35-45, 2016.

[6] J. Chambers, O. Tanrikulu, and A. J. E. l. Constantinides, "Least mean mixed-norm adaptive filtering," vol. 30, no. 19, pp. 1574-1575, 1994.

[7] B. Chen, L. Xing, J. Liang, N. Zheng, and J. C. J. I. s. p. l. Principe, "Steady-state mean-square error analysis for adaptive filtering under the maximum correntropy criterion," vol. 21, no. 7, pp. 880-884, 2014.

[8] E. Eweda, N. J. Bershad, J. C. J. S. Bermudez, "Stochastic analysis of the least mean fourth algorithm for non-stationary white Gaussian inputs," I*mage, and V. Processing*, vol. 8, no. 1, pp. 133-142, 2014.

[9] P. I. Hübscher, J. C. M. Bermudez, and V. H. J. I. T. S. P. Nascimento, "A mean-square stability analysis of the least mean fourth (LMF) adaptive algorithm," vol. 55, no. 8, pp. 4018-4028, 2007.

[10] S.-C. Pei, and C.-C. J. I. J. o. S. A. i. C. Tseng, "Least mean p-power error criterion for adaptive FIR filter," vol. 12, no. 9, pp. 1540-1547, 1994.

[11] Y. Zou, S.-C. Chan, T.-S. J. I. T. o. C. Ng, S. I. "Least mean M-estimate algorithms for robust adaptive filtering in impulse noise," *Analog, and D. S. Processing*,vol. 47, no. 12, pp. 1564-1569, 2000.

[12] O. Tanrikulu, J. J. I. P.-V. Chambers, "Convergence and steady-state properties of the least-mean mixed-norm (LMMN) adaptive algorithm," *Image, and S. Processing*, vol. 143, no. 3, pp. 137-142, 1996.



میثم کاظمی اقبال مدرک کارشناسی ارشد خود را در رشته‌ی مهندسی برق - مدارهای مجتمع الکترونیک در سال ۱۳۹۶ از دان شگاه صنعتی همدان دریافت کرده و زمینه‌های پژوهشی مورد علاقهٔ وی پردازش سیگنال و فیلترهای تطبیقی است.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

m.eghbal@stu.hut.ac.ir



قاسم علی‌پور در سال ۱۳۸۱ کارشناسی مهندسی مخابرات را از دانشگاه تبریز و در سال‌های ۱۳۸۴ و ۱۳۹۱ به‌ترتیب کارشناسی ارشد و دکترای مهندسی الکترونیک را از دانشگاه شهید بهشتی تهران دریافت کرد. وی از مهرماه سال ۱۳۹۱ به‌عنوان استادیار در دانشگاه صنعتی همدان مشغول به فعالیت است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقهٔ نامبرده عبارتند از استفاده از روش‌های تحلیل داده برای پردازش سیگنال‌های صوتی به‌ویژه برای مقاصد نوفه‌زدایی و بازشناسی.

نشانی رایانامهٔ ایشان عبارت است از:

alipoor@hut.ac.ir

[Downloaded from jsdp.rcisp.ac.ir on 2026-11-22]

[DOI: 10.52547/jsdp.18.3.19]