

تجزیه تَنک تصاویر ابرطیفی با استفاده از یک کتابخانه طیفی هرس شده

حسین فیاضی^{۱*}، حمید دهقانی^۲ و مجتبی حسینی^۳

^۱مجمع فناوری اطلاعات و ارتباطات، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۲مجمع مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۳دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران



چکیده

تجزیه طیفی تصاویر ابرطیفی یکی از زمینه‌های پژوهشی مهم در سنجش از دور است. در همین اواخر استفاده مستقیم از کتابخانه‌های طیفی برای انجام تجزیه طیفی افزایش یافته است. در این روش‌ها که به تجزیه تَنک موسومند، نیازی به استخراج مواد پایه و تعیین تعداد آن‌ها از قبل نیست؛ اما از آن‌جا که کتابخانه‌های طیفی حاوی طیف‌هایی هستند که همبستگی زیادی دارند، روش‌های تجزیه تَنک ممکن است، راه‌حل‌های نیمه بهینه‌ای تولید کنند. از طرف دیگر بسیاری از این روش‌ها، نسبت به نوفه حساس بوده و علاوه بر این به راه‌حل به‌طور کامل تَنکی منجر نمی‌شوند. در این مقاله برای حل مشکلات بالا، در ابتدا کتابخانه طیفی براساس اطلاعات طیفی موجود در تصویر و با استفاده از تکنیک‌های خوشه‌بندی و طبقه‌بندی، هرس شده و سپس از الگوریتم ژنتیک برای تجزیه تَنک استفاده شده است. آزمایش‌های انجام‌شده بر روی تصاویر آزمایشی و واقعی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، در تصاویر با نسبت سیگنال به نوفه کم و تصاویر واقعی نتایج بهتری به‌دست می‌دهد.

واژگان کلیدی: تصاویر ابرطیفی، هرس کتابخانه طیفی، تجزیه تَنک.

Sparse unmixing of hyper-spectral images using a Pruned spectral library

Hossein Fayyazi^{1*}, Hamid Dehghani² & Mojtaba Hosseini³

¹Faculty of ICT, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

²Faculty of Electrical and Electronic Engineering, Malek-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

³Department of Computer Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

Spectral unmixing of hyperspectral images is one of the most important research fields in remote sensing. Recently, the direct use of spectral libraries in spectral unmixing is on increase. In this way which is called sparse unmixing, we do not need an endmember extraction algorithm and the number determination of endmembers priori. Since spectral libraries usually contain highly correlated spectra, the sparse unmixing approach leads to non-admissible solutions. On the other hand, most of the proposed solutions are not noise-resistant and do not reach to a sufficiently high sparse solution. In this paper, with the purpose of overcoming the problems above, at first the spectral library will be pruned based on the spectral information of the

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات

سال ۱۳۹۵ شماره ۳ پیاپی ۲۹

image, clustering and classification techniques. Then a genetic algorithm will be used for sparse unmixing. The experimental results on the simulated and real images show that the proposed method gives good results in noisy images.

Keywords: Hyper-spectral images, Spectral Library Pruning, Sparse Unmixing.

۱- مقدمه

به علم تجزیه و تحلیل یک شیء بدون تماس مستقیم با آن در اصطلاح سنجش/ز دور^۱ گویند [1]. امروزه، تصاویر ابرطیفی که به کمک حسگرهای ابرطیفی تهیه می‌شوند، مفهوم آشنایی در سنجش از دور هستند. این حسگرها قادر به نمونه‌برداری از طیف الکترومغناطیس در صدها باند طیفی باریک و نزدیک به هم هستند. درواقع این تصاویر را می‌توان مکعبی از داده دانست که دو بعد مکانی و صدها باند طیفی داشته و هر پیکسل آن برداری از مقادیر تابش و بازتابش ماده یا موادی که در آن پیکسل حضور دارند، در طیف الکترومغناطیس است.

چنانچه در هر پیکسل تنها یک ماده وجود داشته باشد، پیکسل خالص و در صورتی که چند ماده مختلف حضور داشته باشند، پیکسل ترکیبی^۲ نامیده می‌شود. پیکسل‌های ترکیبی بواسطه وضوح کم حسگرهای تصویربرداری (به‌طور معمول بیشتر از پنج متر بر پیکسل) و یا وجود چند ماده در سطح تحت پوشش یک پیکسل به وجود می‌آیند. این ترکیب می‌تواند خطی و یا غیرخطی باشد.

به فرایند تعیین مواد موجود در صحنه (که به مواد پایه^۳ معروفند) و تخمین میزان فراوانی‌شان در هر پیکسل در اصطلاح تجزیه طیفی^۴ گویند. تاکنون، روش‌های مختلفی برای تجزیه طیفی تصاویر ابرطیفی ارائه شده است. در بسیاری از این روش‌ها فرض شده است که تعداد مواد پایه موجود در صحنه معلوم بوده و از سوی دیگر، مواد خالص در تصویر وجود دارند که البته در بسیاری از موارد، این فرض‌ها صحیح نیستند. از طرف دیگر، در روش‌هایی که این فرض‌ها را در نظر نمی‌گیرند، گاهی طیف‌هایی به عنوان طیف خالص به دست می‌آیند که مجازی بوده و وجود فیزیکی ندارند.

در همین اواخر برای غلبه بر مشکلات بالا، برای انجام عمل تجزیه طیفی، به‌طور مستقیم از کتابخانه‌های طیفی^۵ استفاده می‌شود. کتابخانه‌های طیفی منبعی از طیف‌های

مرجع مواد مختلف هستند که در شرایط آزمایشگاهی تهیه شده‌اند. از آن‌جا که تعداد کل مواد پایه موجود در صحنه بسیار کمتر از تعداد مواد موجود در کتابخانه طیفی است، روش‌هایی که ارائه می‌شوند، سعی دارند راه‌حل‌هایی ارائه دهند که منجر به ماتریس‌های فراوانی تُنکی شوند و از این‌رو به تجزیه تُنک^۶ موسومند.

در روش تجزیه تُنک، نیازی به استخراج مواد پایه و تعیین تعداد آن‌ها از قبل نیست؛ اما از آن‌جا که کتابخانه‌های طیفی حاوی طیف‌هایی هستند که همبستگی بالایی دارند، روش‌های تجزیه تُنک ممکن است راه‌حل‌های نیمه بهینه‌ای تولید کنند؛ بنابراین بایستی به نحوی طیف موادی را که به احتمال در تصویر وجود ندارند، از کتابخانه طیفی حذف کرد. به بیان دیگر، بهتر است قبل از تجزیه تُنک، کتابخانه طیفی هرس شود. از طرف دیگر بسیاری از روش‌هایی که برای تجزیه تُنک ارائه شده‌اند، نسبت به نوفه حساس بوده و علاوه بر این به راه‌حل به‌طور کامل تُنکی منجر نمی‌شوند. یکی از مشکلاتی که استفاده مستقیم از کتابخانه طیفی دارد، این است که ممکن است، طیف مواد پایه موجود در کتابخانه و تصویر مورد بررسی در شرایط یکسان تهیه نشده باشند (که به‌طور معمول این امکان صحت دارد) و این امر می‌تواند باعث شود که تخمینی که برای میزان فراوانی پیکسل‌های ترکیبی به دست می‌آید، کمی با واقعیت فاصله داشته باشد. مواد پایه‌ای که از روی خود تصویر استخراج می‌شوند، این مزیت را دارند که شرایط تصویربرداری برای این طیف‌ها و پیکسل‌های ترکیبی تصویر یکسان بوده است؛ اما همان‌طور که در قبل نیز بیان شد، ممکن است این مواد پایه لزوماً در تصویر وجود نداشته باشند.

در این مقاله برای هرس کتابخانه طیفی، روشی مبتنی بر یادگیری ماشین، ارائه شده است. در روش پیشنهادی، ابتدا یک فضای ویژگی جدید برای طیف‌های هر یک از مواد موجود در کتابخانه طیفی در نظر گرفته و سپس کتابخانه طیفی با استفاده از این فضای ویژگی و روش K-

¹ Remote-sensing

² Mixed pixel

³ Endmember

⁴ Spectral Unmixing

⁵ Spectral Library

⁶ Sparse Unmixing

در مدل ترکیب خطی^۴، هر پیکسل تصویر به صورت ترکیب وزن داری از مواد پایه موجود در صحنه بیان می شود که وزن ها متناسب با سطحی از پیکسل هستند که توسط هر ماده پوشیده شده است. در این مدل، طیف هر پیکسل از تصویر را می توان با فرمول زیر بیان کرد [2].

$$S_{1 \times L} = A_{1 \times p} E_{p \times L} + N_{1 \times L} \quad (1)$$

که در آن A یک ماتریس $1 \times p$ و نشان دهنده مقادیر فراوانی هر یک از مواد پایه است. E یک ماتریس $p \times L$ و نشان دهنده طیف مواد پایه است. N ماتریس نوفه و S طیف پیکسل است. مدل ترکیب خطی دارای دو محدودیت فیزیکی است، محدودیت نخست آن است که مقادیر فراوانی بایستی نامنفی باشند (ANC)^۵ و محدودیت دوم این که مجموع فراوانی های مواد پایه در هر پیکسل بایستی یک شود ASC^۶. فرمول های این دو محدودیت به قرار زیرند [2].

$$ANC: \alpha_k(i, j) \geq 0, k=1, \dots, P \quad (2)$$

$$ASC: \sum_{k=1}^P \alpha_k(i, j) = 1 \quad (3)$$

۳- مرور کارهای انجام شده

در این بخش به بررسی روش های مختلف تجزیه طیفی می پردازیم. روش ها را در دو دسته کلی (آ) استخراج مواد پایه و وارون سازی و (ب) تجزیه تئک بررسی می کنیم. از آن جا که یکی از پیش پردازش هایی که برای افزایش سرعت و دقت تجزیه تئک می توان انجام داد، هرس کتابخانه طیفی است، این روش ها نیز مورد بررسی قرار می گیرند.

۳-۱- روش های استخراج مواد پایه و وارون سازی

در همین اواخر الگوریتم های خودکار و یا نیمه خودکار مختلفی برای استخراج مواد پایه ارائه شده اند. بردارهای طیفی که بر اساس مدل ترکیب خطی تولید می شوند، در سیمپلکسی قرار دارند که رئوس آن متناظر با مواد پایه است. برخی از مجموعه داده ها حاوی پیکسل های خالص هستند؛ به بیان دیگر، در این مجموعه داده به ازای هر ماده پایه m_k دست کم یک پیکسل خالص وجود دارد. برخی از مجموعه داده ها شامل پیکسل های خالص نیستند؛ اما در هر رویه آن حداقل

Means خوشه بندی می شود. شماره خوشه ای که برای هر یک از طیف ها به دست می آید به عنوان برچسب آن طیف در نظر گرفته می شود. مقادیر مختلفی نوفه به طیف های اصلی اضافه شده و با همان برچسب طیف اصلی، به عنوان داده آموزشی در نظر گرفته می شوند؛ سپس از این داده ها برای یادگیری یک طبقه بندی کننده، استفاده می شود. در مرحله بعد برای هرس کتابخانه طیفی، طبقه بندی کننده تعیین می کند که هر پیکسل تصویر به کدام یک از خوشه های کتابخانه تعلق دارد. با این روش به اطمینان خوشه هایی وجود خواهند داشت که هیچ پیکسلی از تصویر متعلق به آن نیست. طیف هایی از کتابخانه که به این خوشه ها (خوشه هایی که هیچ پیکسلی عضو آن ها نیست) تعلق دارند، از کتابخانه طیفی حذف شده و به این ترتیب کتابخانه طیفی هرس می شود و طیف مواد پایه نامزد از آن استخراج و در مرحله نهایی، مقادیر فراوانی مواد پایه نامزد با استفاده از الگوریتم ژنتیک تعیین می شوند.

برای مقایسه نتایج حاصل از طبقه بندی کننده های مختلف، از سه طبقه بندی کننده درخت تصمیم^۱، شبکه عصبی^۲ و K نزدیک ترین همسایگی^۳ استفاده شده است. همچنین کارایی الگوریتم ژنتیک با دو الگوریتم پرکاربرد در زمینه تجزیه تئک مقایسه شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهند که در تصاویری با نسبت سیگنال به نوفه کم، الگوریتم پیشنهادی بهتر از الگوریتم های موجود کار می کند. ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. بخش دوم مدل ترکیب خطی را با جزئیات بیشتری معرفی می کند. در بخش سوم کارهای انجام شده در زمینه تجزیه تئک معرفی می شوند. بخش چهارم روش ارائه شده را تشریح می کند. بخش پنجم، نتایج آزمایش های الگوریتم بر روی تصاویر آزمایشی و واقعی را ارائه می دهد. در بخش ششم نیز نتیجه گیری آمده است.

۲- مدل ترکیب خطی

همان طور که در مقدمه بیان شد، ترکیب پیکسل های ترکیبی می تواند به دو صورت خطی و غیرخطی باشد. از آن جا که راه حل ارائه شده در این مقاله برای مدل ترکیب خطی است، در این بخش به بررسی دقیق تر این مدل پرداخته می شود.

¹ Decision Tree

² Neural Network

³ K-Nearest Neighbor

⁴ Linear Mixture Model

⁵ Abundance Non-negativity Constraint

⁶ Abundance Sum-to-one Constraint

روش‌ها در هر رأس سیمپلکس، یک ماده پایه وجود دارد. این فرض اگرچه منجر به طراحی الگوریتم‌هایی با پیچیدگی محاسباتی پایین می‌شود، اما ممکن است در بسیاری از تصاویر، فرض درستی نباشد. این روش‌ها پرکاربردترین روش‌های استخراج مواد پایه در تجزیه طیفی هستند؛ چون بار محاسباتی پایینی داشته و درک آن‌ها آسان است [4].

برخی از مهم‌ترین الگوریتم‌های این دسته از روش‌ها به قرار زیرند. PPI^۲ [10]، N-FINDR [11]، IEA^۳ [12]، VCA^۴ [13]، SGA^۵ [14]، SMACC^۶ [15]، AVMAX^۷ و SVMAX^۸ [16]، CFF^۹ [17].

در پایان، ذکر این نکته ضروری است که برخی از این الگوریتم‌ها، به یک مرحله تخمین تعداد ابعاد نیز نیاز دارند که در مدل ترکیب خطی، این امر منجر به نیاز به تخمین تعداد مواد پایه می‌شود.

۳-۱-۱-۳ روش‌های استخراج مواد پایه مبتنی بر پیکسل‌های ناخالص^{۱۱}

فرض وجود پیکسل خالص در تصویر، همیشه یک فرض درست نیست؛ چون ممکن است به دلیل دقت مکانی پایین حس‌گرهای ابرطیفی، حالتی پیش آید که هیچ‌یک از پیکسل‌های تصویر خالص نباشند. برای حل این مشکل، روش‌هایی با فرض عدم وجود پیکسل خالص معرفی شده‌اند. این روش‌ها سعی دارند، مواد پایه مجازی (که به‌لزوم ممکن است در مجموعه نمونه‌های داده ورودی وجود نداشته باشند) را با یافتن سیمپلکسی با کمینه حجم که تمام مشاهدات را در بر می‌گیرد، حل کنند. برخی از این روش‌ها به قرار زیرند:

ORASIS^{۱۲} [18]، CCA^{۱۳} [19]، AMEE^{۱۴} [20]، ICE^{۱۵} [21]، MVC-NMF^{۱۶} [22]، SSEE^{۱۷} [23]، SPICE^{۱۸} [24] و SISAL^{۱۹} [25].

شرط لازم برای این‌که این تکنیک‌ها به تخمین خوبی دست پیدا کنند، این است که حداقل $p - 1$ بردار طیفی در هر رویه سیمپلکس وجود داشته باشد. همان‌طور که در قبل نیز نشان داده شد، این شرط به‌طور معمول در

$p - 1$ بردار طیفی وجود دارد. در هر دوی این سناریوها می‌توان مواد پایه را با محاط کردن سیمپلکسی با حجم کمینه به داده‌ها، به دست آورد. این ایده ساده اما قدرتمند، توسط Craig در [3] معرفی شد که تعدادی از الگوریتم‌های تجزیه طیفی هندسی بر این اساس استوارند؛ اما در برخی از موارد، سیمپلکس با حجم حداقل، کوچک‌تر از سیمپلکس واقعی است. دلیل این امر آن است که مجموعه داده‌ها به‌شدت با یکدیگر ترکیب شده و هیچ بردار طیفی نزدیک رویه‌های سیمپلکس وجود ندارد. برای این‌گونه مسائل، از روش‌های آماری که در آن ماتریس ترکیب و مقادیر فراوانی به‌عنوان یک مسئله استنتاج آماری با استفاده از مدل‌های احتمالاتی مناسب برای متغیرها و پارامترهای آن در نظر گرفته می‌شوند، استفاده می‌شود [4].

بر این اساس، روش‌های استخراج مواد پایه را می‌توان به دو دسته کلی روش‌های هندسی و روش‌های آماری تقسیم کرد.

۳-۱-۱-۳ روش‌های تجزیه طیفی خطی هندسی

۳-۱-۱-۳-۱ روش‌های استخراج مواد پایه مبتنی بر طبقه‌های خالص^۱

در این دسته از روش‌ها، دسته‌ای از مواد پایه به‌عنوان یک طبقه خالص در نظر گرفته می‌شوند و مسئله استخراج مواد پایه با این فرض حل می‌شود [8]–[5]، در صورتی که در بسیاری از روش‌های موجود برای هر ماده پایه، طیف یک ماده در نظر گرفته می‌شود. زمانی که از چند طیف برای نشان دادن یک طبقه خالص استفاده می‌شود، کلمه ماده پایه به تمام طیف‌هایی که طبقه خالص را مدل می‌کنند اشاره دارد [9].

۳-۱-۱-۳-۲ روش‌های استخراج مواد پایه مبتنی بر پیکسل‌های خالص^۲

در این روش‌ها، فرض می‌شود که برای هر ماده پایه، حداقل یک پیکسل خالص در تصویر وجود دارد. به بیان دیگر در این

¹¹Non-pure pixel-based endmember extraction

¹²Optical Real-time Adaptive Spectral Identification System

¹³Convex Cone Analysis

¹⁴Automatic Morphological Endmember Extraction

¹⁵Iterated Constrained Endmembers

¹⁶Minimum Volume Constrained Non-negative Matrix Factorization

¹⁷Spatial-Spectral Endmember Extraction

¹⁸Sparsity Promoting ICE

¹⁹Minimum Volume Simplex Analysis

²⁰Simplex Identification via Split Augmented Lagrangian

¹ Pure class-based endmember extraction

² Pure pixel-based endmember extraction

³ Pixel Purity Index

⁴Iterative Error Analysis

⁵ Vertex Component Analysis

⁶Simplex Growing Algorithm

⁷Sequential Maximum Angle Convex Cone

⁸Alternative Volume Maximization

⁹Successive Volume Maximization

¹⁰Collaborative Convex Framework

داده‌هایی که به شدت با یکدیگر ترکیب شده‌اند، برقرار نبوده و بنابراین منجر به تولید مواد پایه مصنوعی^۱ می‌شود [9].

۳-۱-۱-۴- روش‌های تجزیه خطی تکه‌ای^۲

روش‌های هندسی را می‌توان به مدل‌های ترکیب خطی تکه‌ای^۳ بسط داد. شرایطی را در نظر بگیرید که در آن، مجموعه پیکسل‌های تصویر، شامل دو سیمپلکس باشند. ترکیب خطی ممکن است، قسمتی و یا تمام مواد پایه موجود در صحنه را بیابد؛ اما مدلی که به دست می‌آید، به‌طور دقیق طبیعت درست ناحیه را نشان نمی‌دهد. در این حالت، دو ناحیه محدب وجود دارد و ممکن است رئوس مواد پایه یک ناحیه درون ناحیه دیگر قرار گیرند. واضح است، الگوریتمی که مواد پایه ناحیه خارجی را بیابد، قادر نخواهد بود مواد پایه ناحیه داخلی را پیدا کند؛ بنابراین لازم است روش‌هایی طراحی شوند که بتوانند به جای یک سیمپلکس، چند سیمپلکس را در مجموعه داده‌ها شناسایی کنند. این دسته از الگوریتم‌ها را می‌توان تجزیه خطی تکه‌ای نامید. یکی از روش‌های طراحی چنین الگوریتم‌هایی آن است که نواحی محدب، به‌عنوان خوشه در نظر گرفته شوند. این روش در [27، 28] مورد بررسی قرار گرفته است. این دو روش از الگوریتم‌هایی که از خوشه‌بندی فازی و احتمالی مشتق شده‌اند، استفاده می‌کنند.

۳-۱-۲- روش‌های تجزیه طیفی خطی آماری

اگر ترکیب‌های طیفی به شدت با یکدیگر ترکیب شده باشند، روش‌های هندسی نتایج ضعیفی به دست می‌دهند، چون در این ترکیب‌ها در رویه‌های سیمپلکس به تعداد کافی بردار طیفی وجود ندارد. در چنین مواردی، روش‌های آماری جایگزین مناسبی هستند که البته پیچیدگی محاسباتی بالاتری نسبت به روش‌های هندسی دارند. در این روش‌ها، تجزیه طیفی به‌عنوان یک مسئله استنتاج آماری فرمول‌بندی می‌شود.

تا این‌جا روش‌های مختلفی را که برای استخراج مواد پایه وجود دارد، معرفی کردیم. پس از تعیین بردارهای طیفی مشاهده‌شده و طیف مواد پایه، مرحله وارون‌سازی عبارت است از حل یک مسئله بهینه‌سازی محدودشده که تفاوت

بین طیف تصویر و طیف حاصل را از ترکیب مواد پایه با ضرایبی که در این مرحله تعیین می‌شود، کمینه می‌کند. روش‌های تجزیه طیفی فراوانی وجود دارد که در آن مراحل تعیین مواد پایه و وارون‌سازی، به‌طور هم‌زمان انجام می‌شوند [4].

در ادامه به معرفی برخی از روش‌هایی که تا به حال برای تجزیه تئک و هرس کتابخانه طیفی ارائه شده‌اند، می‌پردازیم. در [29] روشی برای هرس کتابخانه طیفی ارائه شده است که براساس این ایده کار می‌کند که بیش‌تر داده‌های ابرطیفی در یک زیرفضای کوچک‌تر حضور دارند. مرجع [30]، یک الگوریتم دومرحله‌ای برای تجزیه تئک ارائه داده است که در آن در مرحله نخست مشابه الگوریتم پردازش سیگنال آرایه طبقه‌بندی چند سیگنال^۴ زیرمجموعه‌ای از عناصر کتابخانه که طیف مواد پایه موجود در صحنه در آن‌ها وجود دارد، انتخاب می‌شوند. در مرحله دوم، با استفاده از رگرسیون تئک همکاری‌کننده^۵، که یکی از شکل‌های رگرسیون تئک ساخت‌یافته است، تجزیه طیفی انجام می‌شود.

در [31] چهار الگوریتم تکراری MPP^۶، OMP^۷، ISMA^۸ و TwIST^۹ برای تجزیه تئک معرفی و مقایسه شده‌اند. MPP الگوریتمی است که برای داده‌های بدون نوفه نتایج خوبی به دنبال دارد، ولی مقادیر فراوانی که حاصل می‌شود، محدودیت‌های ANC و ASC را برآورده نمی‌کنند. OMP در هر مرحله، طیفی را از کتابخانه انتخاب می‌کند که بتواند به‌خوبی طیف پیکسل را بازسازی کند. ISMA یک تکنیک دومرحله‌ای است که مجموعه مواد پایه را با اندازه‌گیری تغییر میزان RMSE در هر مرحله تعیین می‌کند. روش TwIST شرط تئک‌بودن را به تابع هدف خود افزوده و با حل این مسأله در هر مرحله، تخمینی را به دست می‌آورد که به دو تخمین قبلی‌اش وابسته است. در [32] دو روش SUnSAL^{۱۰} و Constrained-SUnSAL برای حل مسأله تجزیه تئک ارائه شدند که براساس تبدیل یک مسأله دشوار به مجموعه‌ای از مسائل ساده‌تر کار می‌کنند. الگوریتم‌های متنوع دیگری نیز با ایجاد تغییرات کوچک در روش‌هایی که تاکنون معرفی شدند، ارائه شده‌اند.

^۱طیف‌هایی که متناظر با طیف مواد موجود در طبیعت نبوده و وجود فیزیکی ندارند

^۲Piecewise spectral unmixing

^۳Piecewise linear mixture model

^۴Multiple Signal Classification

^۵Collaborative Sparse Regression

^۶Moore-Penrose Pseudoinverse

^۷Orthogonal Matching Pursuit

^۸Iterative Spectral Mixture Analysis

^۹Two-step Iterative Shrinkage/Thresholding

^{۱۰}Sparse Unmixing by variable Splitting and Augmented Lagrangian

C-SUnSAL+, SUnSAL+, [33] SUnSAL+D و OMP+D و OMP+ [34], CLSUnSAL [35] و SUnSAL-TV [36], [37] نمونه‌هایی از این الگوریتم‌ها هستند.

از آن‌جا که در کتابخانه طیفی ممکن است، گونه‌های مختلفی از یک ماده خاص وجود داشته باشد، در [38] از ایده گروه‌بندی کتابخانه و استفاده از تکنیک طناب گروهی T_{nk} ^۱ برای حل مسأله تجزیه T_{nk} استفاده شده است. از طرفی به‌طور معمول در کتابخانه‌های طیفی، طیف‌هایی وجود دارند که وابستگی زیادی بین آن‌ها وجود دارد. این امر سبب می‌شود که رگرسیون T_{nk} که به پیکسل‌های ترکیبی با تعداد مواد پایه کم اعمال می‌شود، کارایی چندانی نداشته باشد. برای حل این مشکل در [36] تنظیم تناوبی کلی^۲ با رگرسیون T_{nk} کلاسیک ترکیب شده است. در [39]، روشی جدید براساس مشتقات^۳ برای کاهش همدوسی^۴ کتابخانه طیفی ارائه شده است.

در [40] از یک مدل بیزی سلسله‌مراتبی برای حل مسأله تجزیه T_{nk} استفاده شده است. در این روش، برای پارامترهای مدل مورد بررسی، احتمال‌های پیشین مناسب تعیین می‌شود؛ سپس برای استنتاج بیزی از یک الگوریتم پیش‌نگری شرطی تکراری^۵ استفاده می‌کند. مرجع [41] نیز یک رویه تجزیه بیزی T_{nk} ارائه داده است.

۴- روش پیشنهادی

در این بخش جزئیات روش پیشنهادی که می‌توان آن را به شش مرحله پیش‌پردازش، خوشه‌بندی کتابخانه طیفی، تولید داده‌های آموزشی، آموزش طبقه‌بندی‌کننده، هرس کتابخانه طیفی و تجزیه T_{nk} با استفاده از الگوریتم ژنتیک تقسیم کرد، ارائه می‌شود. بلاک روندنمای الگوریتم پیشنهادی در شکل (۱) آمده است.

۴-۱- پیش‌پردازش

طیف موادی که از کتابخانه انتخاب می‌شوند، به تصویری که قرار است بر روی آن تجزیه و تحلیل انجام شود، بستگی دارد. از آن‌جا که در این پژوهش از تصویر معروف Cuprite استفاده شده و این تصویر حاوی طیف‌هایی در محدوده طول موجی معین است، در مرحله نخست تنها طیف‌هایی از کتابخانه انتخاب می‌شوند که حاوی محدوده طول موجی تصویر Cuprite باشند.

از طرفی، کتابخانه‌های طیفی بسیار بزرگ بوده و به‌طور معمول شامل طیف‌هایی هستند که شباهت بسیار زیادی با یکدیگر دارند، چون به‌طور معمول گونه‌های مختلف و یا جایگزین یک ماده خاص در کتابخانه طیفی وجود دارند. به‌بیان دیگر، تعداد مواد جداگانه‌ای که در کتابخانه طیفی وجود دارند، کمتر از تعداد طیف‌های موجود در آن است. به همین دلیل، در ابتدای اجرای الگوریتم، از بین طیف موادی که فاصله زاویه‌ای کمتر از d درجه دارند، تنها طیف یک ماده در کتابخانه طیفی باقی می‌ماند. بدین ترتیب، پس از این مرحله حداقل فاصله زاویه‌ای طیف موادی که در کتابخانه طیفی باقی می‌مانند، d درجه خواهد بود. مقدار d براساس غنای کتابخانه طیفی و تعداد موادی که باقی می‌مانند، به‌صورت تجربی تعیین می‌شود. در این مقاله d برابر پنج در نظر گرفته شده است.

۴-۲- خوشه‌بندی کتابخانه طیفی

در این مرحله، طیف‌هایی از کتابخانه طیفی که به یکدیگر شباهت دارند، در یک گروه قرار می‌گیرند. این کار با خوشه‌بندی کتابخانه طیفی انجام می‌گیرد. هدف از انجام این مرحله آن است که بتوان براساس طیف‌های موجود در کتابخانه، داده‌های آموزشی لازم را برای آموزش یک طبقه‌بندی‌کننده در مراحل بعد به‌دست آورد.

برای کاهش تعداد ویژگی‌های هر طیف و گنجاندن شبیه‌ترین طیف‌ها در یک خوشه، از ایده زیر استفاده شده است: فرض کنید طیف یک ماده را در فضای دوبعدی طول موج بازتابش نمایش دهیم؛ در روش پیشنهادی، این فضا به یک شبکه 8×8 تقسیم شده و تعداد نقاط موجود در هر سلول شمارش می‌شوند. ۶۴ عددی که حاصل می‌شوند، فضای ویژگی جدید را تشکیل می‌دهند شکل (۲). با این تکنیک، تعداد ویژگی‌هایی که برای هر طیف در نظر گرفته می‌شوند، همواره عدد ثابت ۶۴ است و در نتیجه افزایش تعداد باندهای طیفی نمی‌تواند تأثیری بر عملکرد الگوریتم خوشه‌بندی و یا طبقه‌بندی داشته باشد. علاوه‌براین، این روش باعث می‌شود طیف‌هایی که در شرایط مختلف و یا با ابزارهای اندازه‌گیری مختلف تهیه شده‌اند، دارای بردار ویژگی شبیه‌تری به یکدیگر باشند. شایان ذکر است که پس از آزمایش اعداد مختلف برای اندازه شبکه‌ای که بر روی نمودار طیف ماده قرار می‌گیرد، مشخص شد که شبکه 8×8 پاسخ‌های بهتری به دست می‌دهد.

^۴ coherence

^۵ Iterative Conditional Expectation Algorithm

^۱ Sparse Group Lasso

^۲ Total Variation Regularization

^۳ derivatives

در این پژوهش از الگوریتم خوشه‌بندی k -means که یکی از رایج‌ترین روش‌های خوشه‌بندی در داده‌کاوی است، استفاده می‌کنیم؛ اما مشکلی که الگوریتم k -means دارد، آن است که تعداد خوشه‌ها بایستی مشخص باشد. علاوه بر این الگوریتم نسبت به مقادیر اولیه‌ای که به‌عنوان مراکز خوشه در نظر گرفته می‌شود، حساس است. در این پژوهش برای حل این مشکلات از تکنیک خوشه‌بندی کاهش^۵ استفاده می‌شود. این روش، علاوه بر این که تخمینی از تعداد خوشه‌ها به‌دست می‌آورد، قادر است، مراکز خوشه بهینه‌ای برای الگوریتم k -means به دست دهد. پس از تعیین تعداد خوشه‌ها و مراکز خوشه اولیه، کتابخانه طیفی با الگوریتم k -means خوشه‌بندی می‌شود. برای نشان دادن میزان درستی یک خوشه‌بندی به‌طور معمول از دو معیار میانگین فاصله مراکز خوشه از یکدیگر (جداسازی^۶) و میانگین فاصله مراکز خوشه‌شان (همگنی^۷) استفاده می‌شود. پرواضح است، الگوریتمی بهتر است که مراکز خوشه آن از یکدیگر دورتر و داده‌های موجود در هر خوشه به یکدیگر نزدیک‌تر باشند. به بیان دیگر خوشه‌بندی‌ای بهتر است که جداسازی بالاتر، همگنی پایین‌تر و در نتیجه نسبت جداسازی به همگنی (S/H) بالاتری داشته باشد. جدول (۱) خوشه‌بندی با استفاده از معیارهای شباهت مختلف را مقایسه می‌کند.

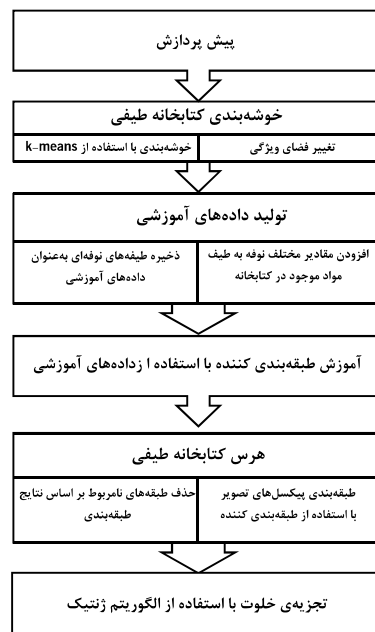
(جدول - ۱) : مقایسه تأثیر استفاده از معیارهای شباهت مختلف

بر روی الگوریتم خوشه‌بندی k -means

(Table-1): Comparison the impact of different similarity measures on k -means clustering algorithm.

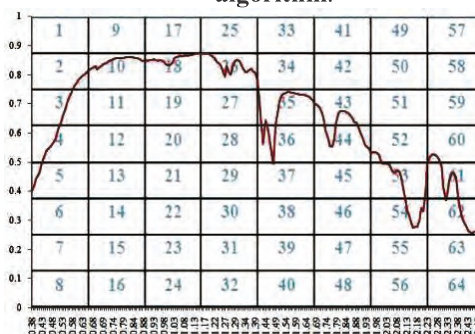
معیارهای درستی خوشه‌بندی			الگوریتم خوشه‌بندی
S/H	همگنی	جداسازی	
4.6551	1.1140	5.1858	k -means(SAD)
5.6121	1.0314	5.7884	k -means(SDS)
5.1001	1.0085	5.1434	k -means(SCS)

مقایسه کمی نتیجه خوشه‌بندی با این روش و حالتی که کل مقادیر بازتابش بعنوان فضای ویژگی در نظر گرفته شوند و یا از PCA برای کاهش فضای ویژگی استفاده شود، نشان می‌دهد که این تغییر فضای ویژگی بهتر می‌تواند طیف‌های شبیه به هم را در یک خوشه قرار دهد. نتایج در جدول (۲) آورده شده‌اند.



(شکل - ۱) : دیاگرام بلوکی الگوریتم پیشنهادی

(Figure-1): Block diagram of the proposed algorithm.



(شکل - ۲) : فضای ویژگی جدید در نظر گرفته شده برای طیف‌ها،

این فضای ۶۴ عنصری با شمردن تعداد نقاط در هر سلول حاصل می‌شود.

(Figure-2): The new feature space of spectrums. The feature space is formed by counting the number of points in each cell.

قبل از انتخاب الگوریتم خوشه‌بندی، بایستی معیار شباهت مورد استفاده برای تعیین میزان شباهت و یا تفاوت داده‌ها به یکدیگر و مراکز خوشه‌هایشان تعیین شود. این معیار بسته به نوع داده‌ها متفاوت است. در این مقاله سه معیار شباهت فاصله زاویه‌ای طیفی (SAD)^۱، فاصله طیفی (SDS)^۲ و همبستگی طیفی (SCS)^۳ را در نظر گرفته و تأثیر انتخاب هر یک را با استفاده از معیار مقدار شباهت طیفی (SSV)^۴ بر نتیجه خوشه‌بندی بیان خواهیم کرد.

¹ Spectral Angle Distance (SAD)

² Spectral Distance Similarity (SDS)

³ Spectral Correlation Similarity (SCS)

⁴ Spectral Similarity Value (SSV)

⁵ Subtractive clustering

⁶ Separation

⁷ Homogeneity

۳-۴- تولید داده‌های آموزشی

در این مرحله براساس نتایج خوشه‌بندی مرحله قبل، داده‌های آموزشی لازم برای آموزش یک طبقه‌بندی‌کننده تولید می‌شوند. این داده‌ها براساس طیف‌های موجود در کتابخانه طیفی تولید می‌شوند. برای این کار برچسب هر طیف، برابر شماره خوشه‌ای که در آن قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. از آن جا که تصاویر ابرطیفی به‌طور معمول حاوی نوفه هستند، به طیف هر یک از مواد موجود در کتابخانه، مقادیر مختلفی نوفه افزوده شده و با برچسب طیف بدون نوفه، در مجموعه داده‌های آموزشی ذخیره می‌شوند. این عمل باعث می‌شود که روش پیشنهادی بتواند برای داده‌های با نسبت سیگنال به نوفه کم به خوبی کار کند. از طرفی این عمل مانع بیش‌برازش^۱ طبقه‌بندی‌کننده می‌شود. مقادیر نسبت سیگنال به نوفه‌ای که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند، عبارتند از: ۱۰ و ۳۰ و ۵۰ و ۷۰ و ۹۰ دسی‌بل (dB). اگر تعداد طیف‌های کتابخانه طیفی را برابر b در نظر بگیریم، پس از این مرحله تعداد داده‌های آموزشی برابر با bk که در این جا k برابر تعداد مقادیر سیگنال به نوفه در نظر گرفته شده (۵=) است.

(جدول - ۲) : مقایسه تأثیر استفاده از فضاهای ویژگی مختلف بر

روی الگوریتم خوشه‌بندی k-means

(Table-2): Comparison the impact of different feature spaces on k-means clustering algorithm.

فضای ویژگی	معیارهای درستی خوشه‌بندی		
	جداسازی	همگنی	S / H
کل	4.5452	0.8525	5.3317
جدید	5.7884	1.0314	5.6121
PCA	0.9698	0.5347	1.8139

۴-۴- آموزش طبقه‌بندی‌کننده

در این مرحله از داده‌های آموزشی حاصل از مرحله قبل، برای آموزش یک طبقه‌بندی‌کننده استفاده می‌شود. برای آزمایش تأثیر استفاده از طبقه‌بندی‌کننده‌های مختلف طبقه‌بندی‌کننده‌های درخت تصمیم، شبکه عصبی و K نزدیک ترین همسایه مورد آزمایش قرار گرفته‌اند.

۴-۵- هرس کتابخانه طیفی

هدف از انجام مراحل قبل این بود که بتوان ابزاری تهیه کرد که قادر باشد براساس اطلاعات طیفی خود تصویر، طیف‌های

^۱ Overfitting

موادی را که به احتمال در تصویر وجود ندارند، از کتابخانه حذف کند. با این عمل، علاوه بر افزایش دقت الگوریتم تجزیه تُنک، سرعت هم‌گرایی آن نیز افزایش پیدا می‌کند. به این منظور، کلیه طیف‌های موجود در تصویر با استفاده از طبقه‌بندی‌کننده حاصل از مرحله قبل طبقه‌بندی می‌شود. با این عمل، طیف مواد خوشه‌هایی از کتابخانه که در طبقه‌بندی تصویر ظاهر نشده‌اند، از کتابخانه حذف شده و مابقی طیف‌ها بعنوان طیف‌های نامزد در نظر گرفته می‌شوند.

۴-۶- تجزیه تُنک با استفاده از الگوریتم ژنتیک

تا این مرحله توانستیم، از بین مواد موجود در کتابخانه طیفی اولیه، تعداد تا حدودی زیاد را براساس اطلاعات طیفی موجود در خود تصویر حذف کنیم. در این مرحله، مسأله تجزیه تُنک را با استفاده از الگوریتم ژنتیک، حل می‌کنیم. برای هر پیکسل از تصویر یک الگوریتم ژنتیک اجرا می‌شود که در آن بازنمایی در نظر گرفته شده برای هر کروموزوم، یک بردار حقیقی به طول تعداد مواد موجود در کتابخانه هرس شده است و هر عنصر آن نشان‌دهنده میزان فراوانی آن عنصر است. از آنجا که به‌طور معمول تعداد بسیار کمی ماده پایه در تشکیل طیف هر پیکسل دخالت دارند، جمعیت اولیه الگوریتم ژنتیک شامل کروموزوم‌هایی است که در هر یک از آن‌ها میزان فراوانی یکی از مواد کتابخانه طیفی برابر با یک و مابقی صفر است. از آن جا که مجموع مقادیر فراوانی بایستی یک باقی بماند، از عملگر تقاطع ریاضی استفاده می‌شود.

عملگر تقاطع ریاضی یکی از رایج‌ترین عملگرهای بازترکیب است که فرزندان را بر اساس جمع وزن‌داری از والدین تولید می‌کند. اگر q و p دو کروموزوم باشند، در این صورت معادله تقاطع ریاضی برای به‌دست آوردن فرزندان Child1 و Child2 از این دو کروموزوم به صورت معادله (۳) است.

$$\text{Child1} = ap + (1 - a)q$$

(۴)

$$\text{Child2} = aq + (1 - a)p$$

پارامتر a، می‌تواند به صورت تصادفی از بازه [0, 1] انتخاب شود؛ در این پژوهش ما مقدار ۰/۳ را انتخاب کرده‌ایم. عملگر جهش نیز که با احتمال ۰/۳ اعمال می‌شود، یک کروموزوم تولید کرده و آن را جایگزین یکی از کروموزوم‌ها می‌کند.

$$SRE = 10 \log_{10} \left(\frac{\alpha_k(i, j)^{22}}{(\alpha_k(i, j) - \hat{\alpha}_k(i, j))^{22}} \right) \quad (7)$$

در کلیه گزارش‌های ارائه‌شده، روش‌ها با نام الگوریتم تجزیه تنگ و سپس نام الگوریتم هرس کتابخانه طیفی در پرانتز در جلوی آن ارائه شده‌اند. برای هرس با استفاده از طبقه‌بندی‌کننده‌های درخت تصمیم، شبکه عصبی و K نزدیک‌ترین همسایگی به ترتیب از نمادهای DT، NN و KNN استفاده شده است. همچنین از آن‌جا که روشی که در [۲۹] برای هرس کتابخانه طیفی ارائه شده است، با دو پارامتر $\lambda = 0.01$ و $\lambda = 0.1$ اعمال شده است، این نمادها در داخل پرانتز به کار رفته‌اند (λ یک پارامتر تنظیم‌کننده است). شایان ذکر است که در کلیه نمودارها، مقادیر منفی و حالتی که برای آن پاسخی حاصل نشده است حذف شده‌اند.

۵-۱- تصویر آزمایشی

دلیل اصلی استفاده از تصاویر آزمایشی، این است که برخلاف تصاویر واقعی، جزئیاتی مانند مواد پایه موجود در صحنه و میزان فراوانی هر یک از آن‌ها در تصویر به‌طور کامل مشخص بوده و می‌توان تجزیه و تحلیل دقیق‌تری را بر روی نتایج اجرای الگوریتم‌ها انجام داد.

از آن‌جاکه در تصاویر واقعی، به‌طور معمول هر پیکسل تصویر شامل دو تا پنج ماده پایه است، تصویر آزمایشی که در این مقاله برای آزمایش الگوریتم‌ها مورد استفاده قرار گرفته است، به‌صورت زیر تولید شده است. پنج ماده مختلف به تصادف از SL1 به‌عنوان مواد پایه اولیه انتخاب شده‌اند. طیف مواد انتخابی در شکل (۳) نشان داده شده‌اند. برای تعیین تعداد مواد پایه در هر پیکسل، یک عدد تصادفی مانند t که $2 \leq t \leq 5$ ، تولید می‌شود؛ سپس t ماده از پنج ماده پایه اولیه انتخاب شده و به‌عنوان مواد پایه تشکیل‌دهنده آن پیکسل در نظر گرفته می‌شوند. میزان فراوانی هر یک از این t ماده، با استفاده از توزیع دیریکل حاصل شده و طیف پیکسل ساخته می‌شود. تصاویر تولیدی برای مقادیر نسبت سیگنال به نوفه ۵ تا ۹۰ (dB) تولید شده‌اند.

شکل‌های ۴، ۵ و ۶ مقادیر SRE(dB)، RMSE و میانگین تعداد مواد پایه موجود در هر پیکسل تصویر را برای مقادیر مختلف نسبت سیگنال به نوفه نشان می‌دهند که حاصل اعمال الگوریتم SUnSAL و روش‌های مختلف هرس کتابخانه طیفی بر روی تصویر آزمایشی است.

از آنجا که هدف، استفاده از کمترین تعداد مواد پایه برای بازسازی طیف هر پیکسل است، تابع شایستگی مورد استفاده به‌صورت زیر است:

$$\text{Fitness} = \min \|Y - AX\|_2 + \lambda \|X\|_0 \quad (5)$$

جمله نخست معادله (۴)، باعث می‌شود طیف تخمینی پیکسل مورد بررسی به طیف واقعی آن نزدیک شود. جمله دوم، موجب می‌شود که بتوان با تعداد طیف مواد پایه کمتری یک طیف را تجزیه کرد. λ هم یک پارامتر کنترلی است که تأثیر جمله دوم تابع شایستگی را کنترل می‌کند. روش انتخاب مورد استفاده نیز، تورنمنت بوده و شرط خاتمه الگوریتم، عدم تغییر در میزان شایستگی جمعیت و یا تکرار الگوریتم به تعداد نسل مشخص (در این مقاله ۱۰۰ نسل) است.

۵- نتایج آزمایش‌ها

برای ارزیابی میزان کارایی الگوریتم پیشنهادی، در مرحله نخست تأثیر استفاده از طبقه‌بندی‌کننده‌های مختلف بر کارایی الگوریتم هرس کتابخانه طیفی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، روش پیشنهادی و روشی که در [۲۹] برای هرس کتابخانه طیفی ارائه شده است، به کتابخانه طیفی USGS (<http://speclab.cr.u-sgs.gov/spectral.lib06>) اعمال شده و تأثیر این هرس بر کارایی الگوریتم تجزیه تنگ SUnSAL مورد بررسی قرار گرفته است؛ سپس براساس نتایج پیاده‌سازی مرحله قبل، بهترین طبقه‌بندی‌کننده انتخاب شده و کارایی نتیجه الگوریتم ژنتیکی که برای تجزیه تنگ ارائه شد، با نتایج الگوریتم‌های SUnSAL و OMP مقایسه شده است.

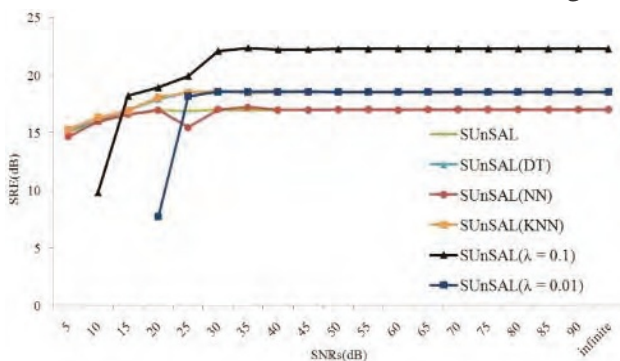
کتابخانه طیفی مورد استفاده حاوی ۳۲۰۰ طیف ماده خالص است که پس از پیش‌پردازش به تعداد ۱۴۳۱ کاهش می‌یابند. با اعمال الگوریتم خوشه‌بندی کاهشی به تعداد ۳۹ خوشه می‌رسیم که تعداد مواد موجود در هر خوشه به‌طور میانگین برابر ۳۷ است.

معیارهایی که برای ارزیابی در نظر گرفته شده‌اند، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)، خطای بازسازی به سیگنال (SRE) و میانگین تعداد مواد پایه تخمینی برای هر پیکسل است، که فرمول محاسبه RMSE و SRE به‌صورت زیر است:

$$RMSE = \sqrt{E[(\alpha_k(i, j) - \hat{\alpha}_k(i, j))^2]} \quad (6)$$

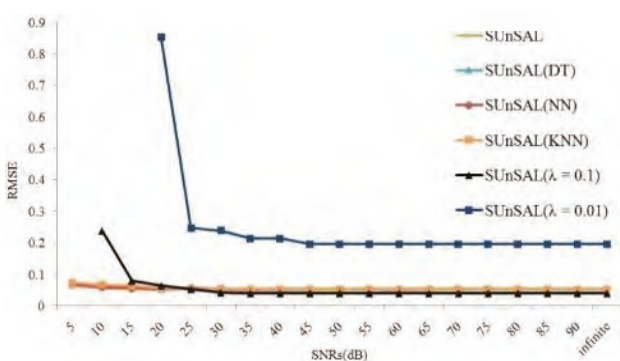
می‌شود این پارامتر تأثیر بسیار زیادی بر نتیجه اجرای الگوریتم دارد؛ به‌طوری‌که برای معیارهای کارایی مختلف، مقدار مناسب برای λ متفاوت است.

جدول (۳) تعداد طیف‌های باقی‌مانده پس از هرس با هریک از روش‌های هرس کتابخانه طیفی را نشان می‌دهد. مقایسه داده‌های این جدول نیز نشان می‌دهند که پارامتر λ می‌تواند نتیجه هرس کتابخانه طیفی را بسیار تحت تأثیر قرار دهد. نکته بدیهی که در اکثر الگوریتم‌های هرس کتابخانه طیفی به چشم می‌خورد، آن است که الگوریتم هرس توانسته تعداد مواد موجود در کتابخانه طیفی را تا حدودی به نصف کاهش دهد.



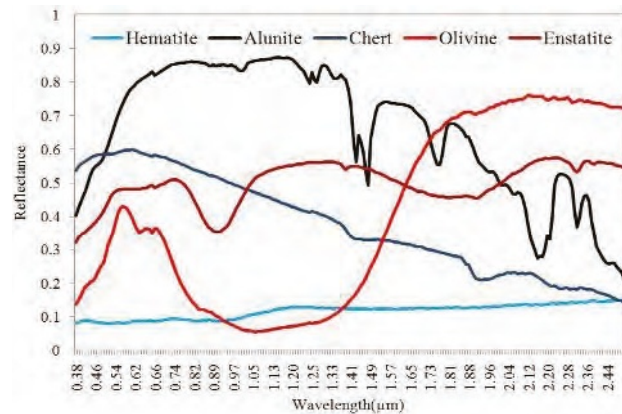
(شکل - ۴) : مقایسه مقادیر SRE(dB) روش‌های مختلف هرس کتابخانه طیفی با اعمال الگوریتم SUnSAL بر روی تصویر آزمایشی

(Figure-4): The comparison of SRE (db) values of different spectral library pruning methods by applying SUnSAL algorithm on simulated images.



(شکل - ۵) : مقایسه مقادیر RMSE روش‌های مختلف هرس کتابخانه طیفی با اعمال الگوریتم SUnSAL بر روی تصویر آزمایشی

(Figure-5): The comparison of RMSE values of different spectral library pruning methods by applying SUnSAL algorithm on simulated images.



(شکل - ۳) : طیف مواد پایه مورد استفاده برای تولید تصویر آزمایشی

(Figure-3): The reflectance spectrum of end-members used for generating simulated images.

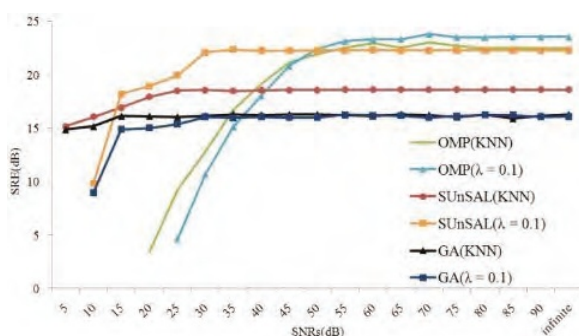
همان‌طور که در شکل (۴) مشخص است، در نسبت سیگنال به نوفه بسیار پایین، روش‌هایی که بر اساس تکنیک‌های طبقه‌بندی کار می‌کنند، بهتر از روش SUnSAL عمل می‌کنند؛ اما SUnSAL در نسبت‌های سیگنال به نوفه بالاتر، بر اساس معیار SRE بر روش‌های دیگر پیشی می‌گیرد. این امر نشان‌دهنده این مطلب است که الگوریتم هرسی که براساس [29] کار می‌کند، قادر است در تصاویر با نسبت سیگنال به نوفه بالا، به آسانی مواد پایه موجود در صحنه را استخراج کند. از آن‌جا که طبقه‌بندی‌کننده‌هایی که برای هرس کتابخانه طیفی آموزش داده‌شده‌اند، با طیف‌های نوفه‌ای نیز آموزش دیده‌اند، قادرند در تصاویر نویزی نتایج بهتری نسبت به الگوریتم هرس مبتنی بر [29] دست دهند. در تصاویر به شدت نوفه‌ای، الگوریتم مبتنی بر [29] به جواب دست پیدا نمی‌کند؛ چون قادر نیست زیرفضای داده‌ها را تخمین بزند.

براساس معیار RMSE که در شکل (۵) آمده است، به‌طور تقریبی تمام الگوریتم‌ها شبیه هم عمل می‌کنند با این تفاوت که الگوریتم SUnSAL($\lambda = 0.01$) از بقیه بدتر عمل کرده است.

طبقه‌بندی‌کننده‌ها را بر اساس عملکرد درست می‌توان به ترتیب K نزدیک‌ترین همسایگی، شبکه عصبی و درخت تصمیم مرتب کرد. از نقطه نظر تعداد مواد پایه تخمینی در هر پیکسل نیز مشاهده می‌شود که روش SUnSAL با پارامتر λ برابر ۰/۱ نتایج معقول‌تری نسبت به بقیه روش‌ها به دست می‌دهد.

تأثیر مقدار λ نیز بر الگوریتم هرس، با دو مقدار ۰/۱ و ۰/۰۱ مورد آزمایش قرار گرفته است. همان‌طور که مشاهده

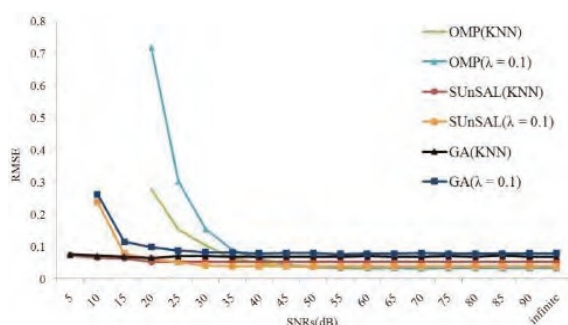
براساس الگوریتم ژنتیک کار می‌کند، به مقدار حقیقی که عددی بین ۲ و ۵ است، نزدیک‌تر است. علاوه بر این، در شرایطی که الگوریتم تجزیه تنگ یکسان باشد، روش هرسی که براساس K نزدیک‌ترین همسایگی کار می‌کند به نتایج بهتری دست پیدا می‌کند.



(شکل - ۷) : مقایسه مقادیر SRE (dB) الگوریتم‌های مختلف

تجزیه تنگ بر روی تصویر آزمایشی با مقادیر مختلف نسبت سیگنال به نوفه

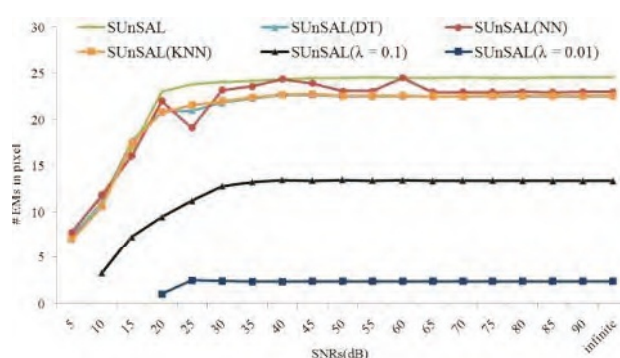
(Figure-7): The comparison of SRE (db) values of different spectral unmixing methods by applying on simulated images in different SNRs.



(شکل - ۸) : مقایسه مقادیر RMSE الگوریتم‌های مختلف تجزیه تنگ بر روی تصویر آزمایشی با مقادیر مختلف نسبت سیگنال به نویز

(Figure-8): The comparison of RMSE values of different spectral unmixing methods by applying on simulated images in different SNRs.

جدول (۴) میانگین زمان اجرای الگوریتم‌های مختلف برای هر پیکسل را نشان می‌دهد. براساس داده‌های این جدول، هرس کتابخانه طیفی، زمان پردازش را به طور قابل توجهی پایین می‌آورد. از این لحاظ الگوریتم‌هایی که براساس [29] کار می‌کنند، با تغییر پارامتر λ زمان اجراشان هم تفاوت می‌کند. همان‌طور که انتظار می‌رود، بار پردازشی الگوریتم ژنتیک نسبت به سایر الگوریتم‌ها بسیار بالاتر است



(شکل - ۶) : مقایسه میانگین تعداد مواد پایه موجود در هر پیکسل تصاویر روش‌های مختلف هرس کتابخانه طیفی با اعمال الگوریتم SUnSAL بر روی تصویر آزمایشی

(Figure-6): The comparison of the average number of end-members in each pixel for different spectral library pruning methods by applying SUnSAL algorithm on simulated images.

(جدول - ۳) : مقایسه تعداد طیف‌های باقی‌مانده در کتابخانه

طیفی پس از هرس آن با استفاده از الگوریتم‌های مختلف

(Table-3): The comparison of the number of remained spectra in the pruned spectral library by applying

Different algorithms.

الگوریتم	تعداد طیف‌های باقی‌مانده در کتابخانه طیفی
<i>SUnSAL</i>	1431
<i>SUnSAL</i> ($\lambda=0.1$)	760
<i>SUnSAL</i> ($\lambda=0.01$)	3
<i>SUnSAL</i> (DT)	875
<i>SUnSAL</i> (KNN)	856
<i>SUnSAL</i> (NB)	705

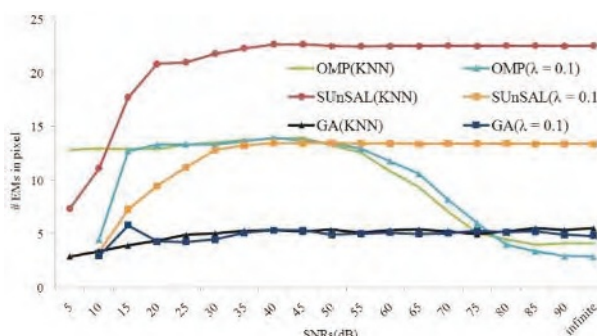
شکل‌های ۷، ۸ و ۹ مقادیر SRE (dB)، RMSE و

میانگین تعداد مواد پایه موجود در هر پیکسل تصویر را که حاصل اعمال الگوریتم‌های تجزیه تنگ OMP، SUnSAL و GA بر روی تصویر آزمایشی است، به عنوان تابعی از نسبت‌های سیگنال به نوفه مختلف نشان می‌دهند.

مقایسه نتایج الگوریتم‌های مختلف در شکل‌های ۷ و ۸ نیز نشان می‌دهد که در نسبت سیگنال به نوفه پایین، روش ارائه شده در این مقاله به خوبی عمل کرده و می‌تواند به جواب دست پیدا کند؛ حال آن‌که روش‌های OMP و SUnSAL در تصاویر به شدت نوفه‌ای حتی به جواب هم نمی‌رسند؛ اما در تصاویر با نسبت سیگنال به نوفه بالا روش OMP از روش‌های دیگر پیشی می‌گیرد.

اگر بخواهیم این روش‌ها را از نقطه نظر تعداد مواد پایه تخمینی در هر پیکسل مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود تعداد مواد پایه تخمینی توسط روش پیشنهادی در این مقاله که

که البته با پیاده‌سازی موازی و سخت‌افزاری این الگوریتم می‌توان بر این مشکل چیره شد.



(شکل - ۹) : مقایسه میانگین تعداد مواد پایه موجود در هر پیکسل تصویر حاصل اعمال الگوریتم‌های مختلف تجزیه تئک بر روی تصویر آزمایشی با مقادیر مختلف نسبت سیگنال به نویز
(Figure-9): The comparison of the average number of end-members in each pixel for different spectral unmixing methods by applying on simulated images in different SNRs.

(جدول - ۴) : مقایسه میانگین زمان اجرای الگوریتم‌های مختلف بر روی تصاویر آزمایشی

(Table-4): The comparison of the mean run time of applying different algorithms on simulated images.

الگوریتم	زمان (ثانیه)	الگوریتم	زمان (ثانیه)
SUnSAL	0.32	SUnSAL	0.32
SUnSAL ($\lambda=0.1$)	0.03	SUnSAL (KNN)	0.015
SUnSAL ($\lambda=0.01$)	0.01	OMP	0.089
SUnSAL (DT)	0.02	OMP (KNN)	0.030
SUnSAL (KNN)	0.02	GA	28.51
SUnSAL (NB)	0.02	GA (KNN)	1.78

۵-۲- تصویر واقعی

برای ارزیابی کارایی روش پیشنهادی بر روی تصاویر واقعی، از تصویر Cuprite (http://aviris.jpl.nasa.gov/data/free_data.htm) که توسط سنجنده AVIRIS در یک منطقه معدنی در Nevada تهیه شده است، استفاده می‌شود. این تصویر شامل ۲۲۴ باند طیفی در محدوده طول موج ۰/۴ تا ۲/۵ میکرومتر است که از این بین تعداد ۳۶ باند به واسطه نسبت سیگنال به نوفه کم و خصوصیات جذبی اتمسفر حذف شده و تعداد ۱۸۸ باند باقی مانده‌اند.

سال ۱۳۹۵ شماره ۳ پیاپی ۲۹

جدول (۵) تأثیر استفاده از طبقه‌بندی‌کننده‌های مختلف را بر نتیجه هرس کتابخانه طیفی و سپس اعمال الگوریتم SUnSAL، برای تصویر واقعی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوریتم هرسی که براساس K نزدیک‌ترین همسایگی کار می‌کند، به نتایج بهتری نسبت به سایر الگوریتم‌ها دست پیدا می‌کند. به علاوه انتخاب پارامتر λ تأثیر به‌سزایی در نتیجه الگوریتم دارد. از سوی دیگر مشاهده می‌شود که هرس با استفاده از K نزدیک‌ترین همسایگی روی تصویر واقعی نتایج بهتری نسبت به سایر الگوریتم‌ها به‌دست می‌دهد؛ این در حالی است که برای تصویر شبیه‌سازی‌شده روش مبتنی بر [29] نتیجه بهتری به دنبال دارد. دلیل این تفاوت را می‌توان در تعداد مواد پایه دخیل در تشکیل پیکسل‌های دو تصویر جستجو کرد. تصویر آزمایشی یک تصویر 10×10 است که تمام پیکسل‌های آن ترکیبی بوده و حداقل تعداد ماده پایه در تشکیل طیف هر پیکسل آن دو است؛ اما در مقابل تصویر واقعی یک تصویر 250×291 است که در آن تعداد زیادی پیکسل خالص وجود داشته و به‌علاوه در تشکیل پیکسل‌های ترکیبی آن تعداد ماده پایه کمتری دخیل هستند. پرواضح است که الگوریتم‌های مبتنی بر یادگیری ماشین، در شرایطی که تعداد داده (پیکسل‌ها)ی بیشتر و خوش‌ترکیب‌تری در اختیار داشته باشند، بتوانند به نتایج بهتری دست یابند.

جدول (۶) نتایج اجرای الگوریتم‌های تجزیه تئک SUnSAL، OMP و GA را در حالتی که هرس با استفاده از K نزدیک‌ترین همسایگی و الگوریتم پیشنهادی در [29] انجام شده است، بر روی تصویر واقعی نشان می‌دهد. در این جدول مقادیر SRE(dB)، RMSE و میانگین تعداد مواد تخمینی هر پیکسل آمده است. مشاهدات جدول (۶) نشان می‌دهند که براساس معیارهای SRE و RMSE، الگوریتم SUnSAL(KNN) از بقیه الگوریتم‌ها عملکرد بهتری دارد، اما از لحاظ معیار تعداد مواد پایه تخمینی در هر پیکسل، الگوریتمی که براساس ژنتیک کار می‌کند، نتایج واقعی‌تری به‌دست می‌دهند.

(جدول - ۵) : مقایسه تأثیر استفاده از طبقه‌بندی‌کننده‌های مختلف برای هرس کتابخانه طیفی برای تصویر واقعی
(Table-5): The comparison of the impact of different classifiers on library pruning method for real image.

معیار ارزیابی	SRE	RMSE	# EMs in pixel (Average)
الگوریتم			
SUnSAL	76.30	0.01	31.49

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که هرس کتابخانه طیفی باعث بهبود دقت عملکرد تمامی الگوریتم‌های تجزیه تنگ می‌شود؛ علاوه بر این، استفاده از طبقه‌بندی کننده K نزدیک‌ترین همسایگی، برای هرس کتابخانه طیفی، نشان می‌دهد که این روش نتایج بهتری نسبت به طبقه‌بندی کننده‌های درخت تصمیم و شبکه عصبی به دست می‌دهد. همچنین، مقایسه نتایج اجرای الگوریتم‌های تجزیه تنگ که با کتابخانه هرس شده به وسیله این طبقه‌بندی کننده و روش ارائه شده [29] نشان می‌دهد که برای تصویر واقعی، هرس با استفاده از K نزدیک‌ترین همسایگی نتایج قابل قبول‌تری دارد. از سوی دیگر، مقایسه نتایج الگوریتم ژنتیک پیشنهادی با دو الگوریتم OMP و SUnSAL نشان می‌دهد که این الگوریتم برای تصاویر با نوفه کم بسیار خوب عمل می‌کند. در شرایطی که الگوریتم‌های SUnSAL و OMP در تصاویری با نسبت سیگنال به نوفه کمتر از ۲۵ dB پاسخی به دست نمی‌دهند، الگوریتم ژنتیک قادر است به پاسخی، به خوبی تصاویر با نسبت سیگنال به نوفه زیاد دست پیدا کند.

همان‌طور که در قبل اشاره شد، تعداد مواد پایه‌ای که در تشکیل طیف هر پیکسل از تصویر شرکت دارند، به‌طور معمول بسیار کم و بین دو تا پنج ماده است. از این منظر، نتایجی که با استفاده از الگوریتم ژنتیک به دست آمده‌اند، بسیار قابل قبول‌تر از دو الگوریتم دیگر است. از آن‌جا که در روش پیشنهادی برای هر پیکسل یک الگوریتم ژنتیک اجرا می‌شود، پرواضح است که بار محاسباتی آن بسیار بالا باشد؛ که البته با استفاده از تکنیک‌های موازی‌سازی و پیاده‌سازی سخت‌افزاری می‌توان بر این مشکل چیره شد.

7-Reference

۷- مراجع

- [1] R. A. Schowengerdt, *Remote sensing: models and methods for image processing*. Academic press, 2006.
- [2] C. HEINZD, "FullyConstrainedLeastSquares LinearMixture Analysisfor Material Quantificationin Hyperspectral Imagery," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, no. 3, p. 529, 2001.
- [3] A. Plaza et al., "Recent advances in techniques for hyperspectral image processing," *Remote sensing of environment*, vol. 113, pp. S110-S122, 2009.
- [4] J. M. Bioucas-Dias et al., "Hyperspectral unmixing overview: Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth*

SUnSAL(DT)	76.07	0.01	21.83
SUnSAL(NN)	76.30	0.01	31.49
SUnSAL(KNN)	76.35	0.01	20.24
SUnSAL($\lambda = 0.1$)	75.93	0.01	13.12
SUnSAL($\lambda = 0.01$)	46.66	0.36	1.00

(جدول - ۶) : مقایسه نتایج SRE(dB), RMSE و میانگین تعداد مواد موجود در هر پیکسل که حاصل اعمال روش‌های مختلف هرس کتابخانه طیفی بر روی تصویر واقعی است.

(Table-6): The comparison of SRE (dB), RMSE and the average number of end-members in each pixel by applying different library pruning methods on real image.

معیار ارزیابی الگوریتم	SRE	RMSE	# EMs in pixel (Average)
OMP(KNN)	50.37	0.24	14.47
OMP($\lambda = 0.1$)	47.26	0.34	13.49
SUnSAL(KNN)	76.35	0.01	20.24
SUnSAL($\lambda = 0.1$)	75.93	0.01	13.12
GA(KNN)	71.27	0.02	7.03
GA($\lambda = 0.1$)	68.26	0.03	4.64

۶- خلاصه و نتیجه‌گیری

تجزیه تنگ موضوع جدیدی در زمینه تجزیه طیفی تصاویر ابرطیفی است که در آن مواد پایه موجود در صحنه به‌طور مستقیم از کتابخانه طیفی استخراج می‌شوند. برخلاف روش‌های موجود، در این روش دیگر نیازی نیست که مواد پایه از تصویر استخراج شده و یا تعداد آن‌ها از قبل مشخص باشد. علاوه بر این، مواد پایه‌ای که در این روش به دست می‌آیند، مجازی نبوده و وجود فیزیکی دارند.

بیش‌تر روش‌های تجزیه تنگی که تا به حال ارائه شده‌اند، رویه‌های تکراری هستند که می‌توانند در تصاویری با نسبت سیگنال به نوفه زیاد خوب عمل کنند؛ اما این روش‌ها قادر نیستند در تصاویر نوفه‌ای نتایج خوبی به دست دهند. علاوه بر این، در این روش‌ها، تعداد مواد پایه‌ای که برای هر پیکسل به دست می‌آید، بسیار زیاد است که در تصاویر واقعی صحت ندارد.

در این مقاله یک روش جدید برای تجزیه تنگ ارائه شد که در آن ابتدا کتابخانه طیفی با استفاده از یک طبقه‌بندی کننده، هرس شده و سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک، تجزیه تنگ انجام می‌شود.

application to blind hyperspectral unmixing," DTIC Document2010.

- [18] J. H. Bowles, P. J. Palmadesso, J. A. Antoniadis, M. M. Baumbach, and L. J. Rickard, "Use of filter vectors in hyperspectral data analysis," in *SPIE's 1995 International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation*, 1995, pp. 148-157: International Society for Optics and Photonics.
- [19] A. Ifarraguerri and C.-I. Chang, "Multispectral and hyperspectral image analysis with convex cones," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 37, no. 2, pp. 756-770, 1999.
- [20] A. Plaza, P. Martínez, R. Pérez, and J. Plaza, "Spatial/spectral endmember extraction by multidimensional morphological operations," *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, vol. 40, no. 9, pp. 2025-2041, 2002.
- [21] M. Berman, H. Kiiveri, R. Lagerstrom, A. Ernst, R. Dunne, and J. F. Huntington, "ICE: A statistical approach to identifying endmembers in hyperspectral images," *IEEE transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, no. 10, pp. 2085-2095, 2004.
- [22] L. Miao and H. Qi, "Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, no. 3, pp. 765-777, 2007.
- [23] D. Rogge, B. Rivard, J. Zhang, A. Sanchez, J. Harris, and J. Feng, "Integration of spatial-spectral information for the improved extraction of endmembers," *Remote Sensing of Environment*, vol. 110, no. 3, pp. 287-303, 2007.
- [24] A. Zare and P. Gader, "Sparsity promoting iterated constrained endmember detection in hyperspectral imagery," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 4, no. 3, pp. 446-450, 2007.
- [25] J. Li and J. M. Bioucas-Dias, "Minimum volume simplex analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2008. IGARSS 2008. IEEE International*, 2008, vol. 3, pp. III-250-III-253: IEEE.
- [26] J. M. Bioucas-Dias, "A variable splitting augmented Lagrangian approach to linear spectral unmixing," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing, 2009. WHISPERS'09. First Workshop on*, 2009, pp. 1-4: IEEE.
- [27] A. Zare and P. Gader, "Piece-wise convex spatial-spectral unmixing of hyperspectral imagery using possibilistic and fuzzy clustering," in *Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on*, 2011, pp. 741-746: IEEE.
- [28] A. Zare, O. Bchir, H. Frigui, and P. Gader, "Spatially-smooth piece-wise convex endmember detection," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS), 2010 2nd Workshop on*, 2010, pp. 1-4: IEEE.
- [5] P. E. Dennison and D. A. Roberts, "Endmember selection for multiple endmember spectral mixture analysis using endmember average RMSE," *Remote sensing of environment*, vol. 87, no. 2, pp. 123-135, 2003.
- [6] J. Settle, "On the effect of variable endmember spectra in the linear mixture model," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 44, no. 2, pp. 389-396, 2006.
- [7] B. Somers, G. P. Asner, L. Tits, and P. Coppin, "Endmember variability in spectral mixture analysis: A review," *Remote Sensing of Environment*, vol. 115, no. 7, pp. 1603-1616, 2011.
- [8] L. Wang and X. Jia, "Integration of soft and hard classifications using extended support vector machines," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 543-547, 2009.
- [9] M.-D. Iordache, "A sparse regression approach to hyperspectral unmixing," INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, 2011.
- [10] J. W. Boardman, "Automating spectral unmixing of AVIRIS data using convex geometry concepts," 1993.
- [11] M. E. Winter, "N-FINDR: An algorithm for fast autonomous spectral end-member determination in hyperspectral data," in *SPIE's International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation*, 1999, pp. 266-275: International Society for Optics and Photonics.
- [12] R. Neville, "Automatic endmember extraction from hyperspectral data for mineral exploration," in *International Airborne Remote Sensing Conference and Exhibition, 4 th/21 st Canadian Symposium on Remote Sensing, Ottawa, Canada*, 1999.
- [13] J. M. Nascimento and J. M. Dias, "Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data," *IEEE transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, no. 4, pp. 898-910, 2005.
- [14] C.-I. Chang, C.-C. Wu, W. Liu, and Y.-C. Ouyang, "A new growing method for simplex-based endmember extraction algorithm," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 44, no. 10, pp. 2804-2819, 2006.
- [15] J. H. Gruninger, A. J. Ratkowski, and M. L. Hoke, "The sequential maximum angle convex cone (SMACC) endmember model," in *Defense and Security*, 2004, pp. 1-14: International Society for Optics and Photonics.
- [16] T.-H. Chan, W.-K. Ma, A. Ambikapathi, and C.-Y. Chi, "A simplex volume maximization framework for hyperspectral endmember extraction," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, no. 11, pp. 4177-4193, 2011.
- [17] M. Möller, E. Esser, S. Osher, G. Sapiro, and J. Xin, "A convex model for matrix factorization and dimensionality reduction on physical space and its

[41] D. R. Thompson, R. Castano, and M. S. Gilmore, "Sparse superpixel unmixing for exploratory analysis of CRISM hyperspectral images," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing*, 2009. *WHISPERS'09. First Workshop on*, 2009, pp. 1-4: IEEE.



حسین فیاضی مدرک کارشناسی خود

را در سال ۱۳۸۸ در رشته مهندسی

کامپیوتر - نرم افزار از دانشگاه سیستان و

بلوچستان و مدرک کارشناسی ارشد خود

را در سال ۱۳۹۲ در رشته مهندسی

کامپیوتر - هوش مصنوعی از دانشگاه صنعتی مالک اشتر دریافت کرد. زمینه پژوهشی مورد علاقه ایشان پردازش تصویر، شناسایی الگو و بینایی ماشین است.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

hossein.fayyazi@chmail.ir



حمید دهقانی مدرک کارشناسی خود

را در رشته الکترونیک در سال ۱۳۷۹ از

دانشگاه صنعتی مالک اشتر دریافت کرد؛

سپس دوره های کارشناسی ارشد و

دکترای مخابرات را به ترتیب در سال های

۱۳۸۱ و ۱۳۸۵ در دانشگاه تربیت مدرس به اتمام رساند.

ایشان در حال حاضر دانشیار دانشگاه صنعتی مالک اشتر

بوده و در زمینه های پردازش سیگنال و تصویر، شناسایی الگو

و سنجش از دور پژوهش های خود را پیش می برد.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

hamid_deh@yahoo.com



مجتبی حسینی مدرک کارشناسی

خود را در سال ۱۳۷۰ از دانشگاه صنعتی

مالک اشتر در رشته مهندسی برق و

مدارک کارشناسی ارشد و دکترای خود

را به ترتیب در سال های ۱۳۷۴ و ۱۳۹۰

از دانشگاه صنعتی امیرکبیر در رشته مهندسی کامپیوتر

گرایش معماری کامپیوتر اخذ کرد. زمینه های پژوهشی مورد

علاقه ایشان شبکه های حس گر بیسیم، پردازش سیگنال

دیجیتال، پردازش تصویر، پردازش صوت، سیستم های

توزیع شده و محاسبات تکاملی است.

نشانی رایانامه ایشان عبارت است از:

mojtabahoseini@aut.ac.ir

[29] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Dictionary pruning in sparse unmixing of hyperspectral data," in *Hyperspectral Image and Signal Processing (WHISPERS)*, 2012 4th Workshop on, 2012, pp. 1-4: IEEE.

[30] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, and B. Somers, "MUSIC-CSR: Hyperspectral unmixing via multiple signal classification and collaborative sparse regression," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, no. 7, pp. 4364-4382, 2014.

[31] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Unmixing sparse hyperspectral mixtures," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2009 IEEE International, IGARSS 2009*, 2009, vol. 4, pp. IV-85-IV-88: IEEE.

[32] J. M. Bioucas-Dias and M. A. Figueiredo, "Alternating direction algorithms for constrained sparse regression: Application to hyperspectral unmixing," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2010 2nd Workshop on, 2010, pp. 1-4: IEEE.

[33] M.-D. Iordache, A. Plaza, and J. Bioucas-Dias, "On the use of spectral libraries to perform sparse unmixing of hyperspectral data," in *Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing (WHISPERS)*, 2010 2nd Workshop on, 2010, pp. 1-4: IEEE.

[34] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Sparse unmixing of hyperspectral data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, no. 6, pp. 2014-2039, 2011.

[35] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Collaborative sparse regression for hyperspectral unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, no. 1, pp. 341-354, 2014.

[36] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Total variation spatial regularization for sparse hyperspectral unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 50, no. 11, pp. 4484-4502, 2012.

[37] X.-L. Zhao, F. Wang, T.-Z. Huang, M. K. Ng, and R. J. Plemmons, "Deblurring and sparse unmixing for hyperspectral images," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 51, no. 7, pp. 4045-4058, 2013.

[38] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Hyperspectral unmixing with sparse group lasso," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, 2011 IEEE International, 2011, pp. 3586-3589: IEEE.

[39] J. Bieniarz, R. Müller, X. Zhu, and P. Reinartz, "Sparse approximation, coherence and use of derivatives in hyperspectral unmixing," 2012.

[40] K. E. Themelis, A. A. Rontogiannis, and K. Koutroumbas, "Sparse semi-supervised hyperspectral unmixing using a novel iterative bayesian inference algorithm," in *Signal Processing Conference, 2011 19th European*, 2011, pp. 1165-1169: IEEE.